3.1. *In einem noetherschen Ring R enthält jedes Ideal ein (endliches) Produkt von Primidealen.*

(Beachte: Der Satz ist auch richtig für $R = 0$. in diesem Fall gibt es keine Primideale, aber die übliche Konvention erlaubt es, auch das Produkt über eine leere Indexmenge zu bilden; das Produkt einer leeren Menge von Idealen ist der Ring selbst.)

Beweis von 3.1. Angenommen, die Behauptung ist falsch. Bezeichnen wir mit $\mathcal{S}$ die Menge der Ideale, die kein Produkt von Primidealen enthalten, so ist demnach $\mathcal{S}$ nicht leer. Da R noethersch ist, gibt es I maximal in $\mathcal{S}$. Das Ideal I ist kein Primideal (kein Primideal gehört zu $\mathcal{S}$), also gibt es Elemente r, r' die nicht in I liegen, mit $rr' \in I$. Sei $J = I + Rr, J' = I + Rr'$. Es ist $JJ' \subseteq I$. Da $I \subset J, I \subset J'$ gilt, gehören J, J' nicht zu $\mathcal{S}$, also enthalten J, J' jeweils Produkte von Primidealen, etwa $\prod P_i \subseteq J$, $\prod P_i' \subset J'$, also $(\prod P_i)(\prod P_i') \subseteq JJ' \subseteq I$. Widerspruch.

3.2. *Ein noetherscher Ring R der Dimension 0 ist artinsch.*

Beweis: Wegen 3.1 gibt es Primideale (also maximale Ideale) M_i mit $0 = M_1 \cdots M_n$. Sei $I_i = M_1 \cdots M_i$. Die Idealkette

$$R = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_n = 0$$

hat Faktoren I_{i-1}/I_i, die von M_i annulliert werden, es sind also R/M_i-Moduln, also Vektorräume. Da I_{i-1} endlich erzeugter R-Modul ist, ist I_{i-1}/I_i endlich-dimensionaler R/M_i-Vektorraum, und demnach ein artinscher R-Modul. Jeder Modul mit einer endlichen Filtrierung mit artinschen Faktoren ist selbst artinsch.

3.3. Hauptlemma für den Satz von Krull-Akizuki. *Sei R ein noetherscher Bereich mit* $\dim R \le 1$. *Sei S ein Unterring von* $\mathrm{Quot}(R)$ *der R enthält. Ist $0 \neq r \in R$, so ist S/Sr endlich-erzeugter R-Modul.*

(Beachte: Keineswegs kann man erwarten, dass S selbst ein endlich-erzeugter R-Modul ist: betrachte den Fall $R = \mathbb{Z}$, und $S = \mathrm{Quot}(R) = \mathbb{Q}$.)

Beweis von 3.3. Betrachte die Ideale $I_m = (Sr^m \cap R) + Rr$, sie bilden eine absteigende Kette $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$, also gibt es n mit

$$I_n/Rr = I_{n+1}/Rr = \cdots,$$

denn R/Rr ist artinsch.

Wir zeigen: $S \subseteq R\frac{1}{r^n} + Sr$. Sei $s \in S$, schreibe $s = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in R$ und $b \neq 0$. Wir betrachten nun den Ring R/Rb, der ebenfalls artinsch ist. Die Ideale $Rr^m + Rb$ bilden eine absteigende Idealkette, also gibt es ein k mit $Rr^m + Rb = Rr^{m+1} + Rb$, insbesondere ist also $Rr^m \subseteq Rr^{m+1} + Rb$ Also ist $r^m = xr^{m+1} + yb$ mit $x, y \in R$. Dies schreiben wir um zu $(1 - xr)r^m = yb$. Demnach gilt:

$$\begin{aligned} s = &= s(1 - xr) + sxr \\ &= \tfrac{a}{b}(1 - xr)\frac{r^m}{r^m} + sxr \\ &= \frac{a}{r^m}y + sxr \in R\frac{1}{r^m} + Sr. \end{aligned}$$

Ist nun $m \le n$, so sehen wir: $s \in R\frac{1}{r^m} + Sr \subseteq R\frac{1}{r^n} + Sr$. Sei demnach $m > n$. Setze $a' = ay, s' = sx$. Es ist $a' \in R$ und $s' \in S$ und es gilt $s = \frac{a'}{r^m} + s'r$, also

$$a' = (s - s'r)r^m \in Sr^m \cap R \subseteq I_m = I_{m+1} \subseteq Sr^{m+1} + Rr.$$

Demnach gibt es $u \in S$ und $z \in R$ mit $a' = ur^{m+1} + zr$. Also

$$s = \frac{a'}{r^m} + s'r = \frac{ur^{m+1} + zr}{r^m} + s'r = \frac{z}{r^{m-1}} + (u + s')r \in R\frac{1}{r^{m-1}} + Sr.$$

Wir können also für $m > n$ den Exponenten m jeweils durch $m-1$ ersetzen. Damit ist gezeigt, dass wirklich $S \subseteq R\frac{1}{r^n} + Sr$ gilt.

Dies besagt aber, dass S/Sr Untermodul des zyklischen R-Moduls $(R\frac{1}{r^n} + Sr)/Sr$ ist. Da R noethersch ist, ist jeder Untermodul eines zyklischen Moduls endlich erzeugt.

3.4. Satz von Krull-Akizuki. *Sei R noetherscher Bereich mit* $\dim R \le 1$. *Sei L eine endliche Körper-Erweiterung von* $\mathrm{Quot}(R)$. *Behauptung: Jeder Zwischenring $R \subseteq S \subseteq L$ ist S noethersch.*

Beweis: Sei $K = \mathrm{Quot}(R)$. Zuerst betrachten wir den Spezialfall $K = L$. Sei also ein Unterring S mit $R \subseteq S \subseteq K$ gegeben. Zu zeigen ist, dass jedes Ideal J von S endlich erzeugt ist. Wir können annehmen, dass $J \ne 0$ gilt. Sei $0 \ne s \in J$, etwa $s = \frac{r}{r'}$ mit $r, r' \in R$. Mit s ist auch $r \in J$ und $r \ne 0$. Das Hauptlemma zeigt: S/rS ist endlich erzeugter R-Modul. Da R noethersch ist, ist auch der Untermodul J/rS von S/rS endlich erzeugter R-Modul. Sei etwa $\overline{r}_1, \dots, \overline{r}_t$ ein endliches Erzeugendensystem von J/rS als R-Modul. Dann ist dies auch ein Erzeugendensystem von J/rS als S-Modul. Demnach ist $r, r_1, \dots, r_t$ ein Erzeugendensystem von J als S-Modul. Damit ist der Spezialfall bewiesen.

Sei nun $K \subseteq L$ beliebige endliche Körpererweiterung. Sei $S' = \{\frac{s}{r} \mid s \in S, 0 \ne r \in R\}$. Dies ist offensichtlich ein Unterring von L, der S und K enthält. Als Unterring von L ist S' ein Bereich. Aber S' ist auch ein K-Unterraum von L. Da L endlich-dimensionaler K-Vektorraum ist, ist auch S' endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Demnach ist S' ein Körper. Wir können also annehmen $S' = L$. Sei $x_1, \dots, x_n$ eine K-Basis von L. Wir können annehmen, dass alle x_i zu S gehören (denn wegen $L = S'$ können wir die Elemente x_i in der Form $x_i = \frac{x_i'}{r}$ mit $x_i' \in S$ und $r \in R$ schreiben; statt der Basis x_i betrachte also die Basis x_i').

Die x_i sind algebraisch über K, also können wir annehmen, dass sie sogar ganz über R sind (ersetze x_i durch ein geeignetes R-Vielfaches). Sei $R' = R[x_1, \dots, x_n]$, dies ist ein endlich-erzeugter R-Modul, also ist $R \subseteq R'$ ganze Bereichs-Erweiterung. Beachte: $L = \mathrm{Quot}(R')$, denn R' enthält R und eine K-Basis von L.

Wir zeigen, dass R' noethersch ist: Sei I ein Ideal von R'. Dies ist ein R'-Untermodul von R', also auch ein R-Untermodul von R', also endlich erzeugt als R-Modul, also endlich erzeugt als R'-Modul. Dies zeigt: R' ist noethersch. Mit R ist auch R' eindimensional, denn $R \subseteq R'$ ist ganze Bereichs-Erweiterung (2.3).

Wir wenden nun den Spezialfall auf $R' \subseteq S \subseteq L = \mathrm{Quot}(R')$ an und sehen, dass S noethersch ist.

4. Dedekind-Ringe.

Ein Bereich R heißt *Dedekind-Ring,* wenn er noethersch und normal ist, und jedes von Null verschiedene Primideal maximal ist (also $\dim R \le 1$ gilt).

4.1. *Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen rationalen Zahlen ist ein Dedekind-Ring. Der Polynomring $k[X]$ in einer Variabeln mit Koeffizienten in einem Körper k ist ein Dedekind-Ring.* Ganz allgemein gilt: *Jeder Hauptidealbereich ist ein Dedekind-Ring.* (Dies kann direkt gezeigt werden, ein eher konzeptioneller Beweis wird im Abschnitt 5 gegeben.)

4.2. *Sei R Dedekind-Ring mit Quotientenkörper K, sei $K \subseteq L$ endliche Körpererweiterung. Sei S der ganze Abschluss von R in L. Dann ist L Dedekind-Ring.*

Beweis. Es gilt: L ist noethersch, nach Krull-Akizuki. Und L ist normal, wegen 1.5. Schließlich ist $\dim R \le 1$ nach 2.3.

4.3. Folgerung *Sei K ein Zahlkörper, sei $\mathcal{O}_K$ die Menge der ganzen Zahlen in K. Dann ist $\mathcal{O}_K$ Dedekind-Ring.*

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dd, dash] \\
\mathbb{Q} \arrow[ur, dash] \arrow[dd, dash] & \\
 & \mathcal{O}_K \\
\mathbb{Z} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Algebraische Kurven. Sei k ein Körper. Eine *algebraischen Kurve* die über k definiert ist, "ist" ein nullteilerfreier Faktorring S eines Polynomrings $k[X_1, \dots, X_n]$ in endlich vielen Variablen X_i, mit Krull-Dimension $\dim S = 1$ (genauer formuliert: R ist der *Koordinatenring* einer solchen Kurve). Dass S Faktorring eines Polynomrings in n Variablen ist, besagt gerade: es gibt n Elemente $s_1, \dots, s_n \in S$, sodass S als Ring von k und diesen Elementen $s_1, \dots, s_n$ erzeugt wird.

Der Noether'sche Normalisierungssatz (siehe zum Beispiel `alg/LEIT-GEO.pdf`, p.4, und p.12) liefert in diesem Fall: S besitzt einen Unterring $R = k[r]$, wobei r nicht algebraisch über k ist (also: $k[a]$ ist isomorph zum Polynom-Ring $k[X]$ in einer Variablen) und $R \subseteq S$ ist eine ganze Bereichs-Erweiterung. Sei nun $K = \mathrm{Quot}(R)$, und $L = \mathrm{Quot}(S)$. Dann ist $L\colon K$ eine endliche Körper-Erweiterung (denn L wird über K von den algebraischen Elementen $s_1, \dots, s_n$ erzeugt). Sei S' die Menge der Elemente von L, die ganz über R sind. Dann ist S' normaler Ring, mit Quotientenkörper L und $S \subseteq S'$. Wir haben folgende Situation

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[d, dash] \\
K \arrow[ur, dash] \arrow[dd, dash] & S' \arrow[d, dash] \\
 & S \\
R \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Wie wir gezeigt haben, gilt: Der Ring S' ist ein Dedekind-Ring.