6.4. Die Endlichkeit der Klassenzahl.

Satz. *Die Klassenzahl eines Zahlkörpers ist endlich.*

Sei K ein Zahlkörper.

Schritt 1: *Es gibt eine positive reelle Zahl μ mit folgender Eigenschaft: Ist $0 \neq I$ Ideal von $\mathcal{O}_K$, so gibt es $0 \neq \alpha \in I$ mit*

$$N(\langle a \rangle) \ \leq \ \mu \cdot N(I).$$

Beweis: Sei $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$ (es genügt sogar, eine $\mathbb{Q}$-Basis von K aus ganzen Elementen zu nehmen). Zu $N(I)$ gibt es eine natürliche Zahl t mit

$$t^n \leq N(I) < (t+1)^n.$$

Betrachte die Menge S der Elemente von $\mathcal{O}_K$ der Form $\sum_i c_i \omega_i$ mit $0 \leq c_i \leq t$. Diese Elemente sind paarweise verschieden (da $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\sum \mathbb{Z}\omega_i$ ist). Die Anzahl dieser Elemente ist $(t+1)^n$. Wegen $N(I) < (t+1)^n$ können die Restklassen modulo I nicht paarweise verschieden sein, also gibt es $b \neq c$ in S mit $b - c \in I$. Setze $a = b - c$, also ist $\alpha = \sum_i a_i \omega_i$ mit $|a_i| \leq t$. Es ist

$$\begin{aligned} N(\langle \alpha \rangle) = |\prod\nolimits_{i=1}^n \sigma_i(\alpha)| &= |\prod\nolimits_{i=1}^n \sum\nolimits_j a_j \sigma_i(\omega_j)| \\ &\leq \prod\nolimits_{i=1}^n \sum\nolimits_j |a_j||\sigma_i(\omega_j)| \\ &\leq \prod\nolimits_{i=1}^n \sum\nolimits_j t|\sigma_i(\omega_j)| \\ &= t^n \prod\nolimits_{i=1}^n \sum\nolimits_j |\sigma_i(\omega_j)| \\ &\leq N(I) \prod\nolimits_{i=1}^n \sum\nolimits_j |\sigma_i(\omega_j)|. \end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Ungleichung wegen $t^n \leq N(I)$. Wir nehmen also

$$\mu = \prod\nolimits_{i=1}^n \sum\nolimits_j |\sigma_i(\omega_j)|.$$

Schritt 2: *Ist $0 \neq I$ Ideal in $\mathcal{O}_K$, so gibt es ein Ideal J mit $N(J) \leq \mu$, sodass I und J^{-1} zur gleichen Idealklasse gehören* (es gibt also $\alpha \in K^*$ mit $I = J^{-1}\alpha$).

Beweis: Zu I gibt es nach Schritt 1 ein Element $0 \neq \alpha \in I$ mit $N(\langle \alpha \rangle) \leq \mu \cdot N(I)$. Aus $\alpha \in I$ folgt $\langle \alpha \rangle \subseteq I$, also gibt es ein Ideal J mit

$$\langle \alpha \rangle = IJ$$

(wir sind ja in einem Dedekind-Ring). Die Multiplikativität der Norm liefert

$$N(I)N(J) = N(IJ) = N(\langle \alpha \rangle) \leq \mu \cdot N(I),$$

also

$$N(J) \leq \mu.$$

Und die Gleichung $IJ = \langle\alpha\rangle$ können wir zu

$$I = J^{-1}\langle\alpha\rangle = J^{-1}\alpha$$

umschreiben. Wir sehen: I und J^{-1} gehören zur gleichen Idealklasse.

Schritt 3: In 6.3 (1) wurde gezeigt, dass es nur endlich viele Ideale J mit $N(J) \leq \mu$ gibt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zusatz. *In jeder Idealklasse gibt es ein Ideal I mit $N(I) \leq \mu$.*

Beweis. Dies wurde im Prinzip in Schritt 2 gezeigt. Ist I ein gebrochenes Ideal, so sei $[I]$ die zugehörige Idealklasse, also die Menge der zu I äquivalenten gebrochenen Ideale:

$$[I] = \{\ I\alpha \mid 0 \neq \alpha \in K\ \}.$$

Beginnt man mit der Idealklasse $[I']$ mit einem gebrochenen Ideal I', so bilden wir zuerst einmal das gebrochene Ideal $(I')^{-1}$. Zu $(I')^{-1}$ gibt es $0 \neq \beta \in \mathcal{O}_K$, sodass $(I')^{-1}\beta$ ein (ganzes) Ideal ist. Wende nun Schritt 2 darauf an: Wir finden ein Ideal J mit $N(J) \leq \mu$ und $(I')^{-1}\beta = J^{-1}\alpha$. Es ist

$$[I']^{-1} = [(I')^{-1}] = [(I')^{-1}\beta] = [J^{-1}\alpha] = [J^{-1}] = [J]^{-1},$$

und demnach ist $[I'] = [J]$.

Bemerkung. Mit Hilfe der sogenannten Minkowski-Theorie ("Geometrie der Zahlen") kann man die Schranke μ verbessern. Zum Beispiel kann man

$$\mu = \frac{n!}{n^n}\Big(\frac{4}{\pi}\Big)^s\sqrt{|\Delta_K|}$$

wählen, dabei ist $s = \frac{1}{2}(n-r)$ und r die Anzahl der Einbettungen $K \to \mathbb{R}$ (siehe zum Beispiel Milne). Man nennt $\frac{n!}{n^n}\big(\frac{4}{\pi}\big)^s$ die *Minkowski-Konstante.*

Aus der Tatsache, dass jede Idealklasse ein Ideal I mit $N(I) \leq \frac{n!}{n^n}\big(\frac{4}{\pi}\big)^s\sqrt{|\Delta_K|}$ enthält, folgt die Abschätzung

$$\sqrt{|\Delta_K|}\ \geq\ \frac{n^n}{n!}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^s\ \geq\ \frac{n^n}{n!}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{n/2}$$

(denn es gibt ja mindestens eine Idealklasse). Setzen wir

$$a_n = \frac{n^n}{n!}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{n/2},$$

so sieht man $a_2 > 1$ und

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)^n\big(\tfrac{\pi}{4}\big)^{1/2} > 1.$$

Die Folge der rellen Zahlen a_n wächst monoton, also ist $a_n > 1$ für alle $n \geq 2$. Dies besagt:

Folgerung. *Ist $n > 1$, so ist $|\Delta_K| > 1$.*