6.7. Körpertürme.

Satz. *Seien $K \subseteq L$ Zahlkörper, sei p Primzahl. Ist p ein Teiler von Δ_K, so auch von Δ_L.*

Bemerkung: Es gilt sogar: $\Delta_K | \Delta_L$, aber dies ist schwerer zu beweisen. Der übliche Beweis (Neukirch, Lang, usw) leitet dies von einer entsprechenden Eigenschaft der "Differente" ab.

Beweis. Sei p Teiler von Δ_K. In 6.6 haven wir gesehen, dass p in $\mathcal{O}_K$ verzweigt ist. Also gibt es in $\mathcal{O}_K/\langle p\rangle$ nicht-triviale nilpotente Elemente. Nun ist die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_K/\langle p\rangle \to \mathcal{O}_L/\langle p\rangle$ injektiv, denn $\mathcal{O}_K \subseteq \mathcal{O}_K$ ist eine reine Einbettung abelscher Gruppen (siehe Aufgabe 8.1). Die nilpotenten Elemente von $\mathcal{O}_K/\langle p\rangle$ sind nilpotent auch als Elemente von $\mathcal{O}_L/\langle p\rangle$. Daraus folgt, dass p in $\mathcal{O}_L$ verzweigt ist, also ist p Teiler von Δ_L, siehe 6.6.

Im folgenden werden wir nicht nur verwenden, dass für einen Körper-Turm

$$\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$$

die Teilbarkeitsbeziehung $\Delta_K | \Delta_L$ gilt, sondern die folgende schärfere Behauptung:

$(*)$ *Sind $K \subseteq L$ Zahlkörper mit $[L:K] = m$, so ist ${\Delta_K}^m$ ein Teiler von Δ_L..*

Siehe zum Beispiel Ribenboim, 10.7K, p.213. Genauer wird dort gezeigt:

$$\boxed{{\Delta_K}^m \cdot N_{K:\mathbb{Q}}(\Delta_{L:K}).}$$

6.8. Linear-disjunkte Körper-Erweiterungen.
Sind K, L algebraische Unterkörper von $\mathbb{C}$, so sei KL der kleinste Unterkörper von $\mathbb{C}$, der K und L enthält. Offensichtlich ist KL der Summenabschluss der Menge $\{\alpha\beta \mid \alpha \in K, \beta \in L$. Ist $x_1, \dots, x_n$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K und $y_1, \dots, y_m$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von L, so ist die Menge der Elemente $x_i y_j$ ein Erzeugendensystem von KL als $\mathbb{Q}$-Vektorraum; im allgemeinen aber keine $\mathbb{Q}$-Basis (als Beispiel nimm $K = L \neq \mathbb{Q}$).

Satz. *Seien K, L Zahlkörper mit teilerfremden Diskriminanten Δ_K, Δ_L. Sei $x_1, \dots, x_n$ eine Ganzheitsbasis von K, und $y_1, \dots, y_m$ eine Ganzheitsbasis von L. Dann ist $x_1 y_1, \dots, x_n y_m$ eine Ganzheitsbasis von KL und $\Delta_L = \Delta_K^m \cdot \Delta_L^n$* (und natürlich $[KL : \mathbb{Q}] = nm$).

Beweis. Wir setzen zusätzlich voraus, dass einer der beiden Körper normal über $\mathbb{Q}$ ist (ohne diese Zusatz-Voraussetzung muss man die normale Hülle eines der beiden Körpers heranziehen, siehe etwa Ribenboim 10.7Q).

Sei $K : \mathbb{Q}$ normal, sei $\alpha \in K$ ein primitives Element, also $K = \mathbb{Q}[\alpha]$. Sei $f \in \mathbb{Q}[\alpha]$ das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. Es ist $f = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$, wobei wegen der Normalität alle α_i zu K gehören. Wir zeigen als erstes: $[KL : L] = n$ (und daher $[KL : \mathbb{Q}] = nm$). Wegen $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ ist $KL = L[\alpha]$. Sei $g \in L[X]$ das Minimalpolynom von

α über L. Aus $f(\alpha) = 0$ folgt, dass g ein Teiler von f ist, also ist $g = \prod_{i\in I}(X - \alpha_i)$, wobei I eine Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist. Sei etwa $I = \{1, 2, \ldots, t\}$ mit $t \le n$. Sei E der Unterkörper von L, der von den Koeffizienten von g erzeugt wird. Die Koeffizienten von g liegen im Ring, der von den Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ erzeugt wird, also in K. Aus $E \subseteq K$ folgt $\Delta_E|\Delta_K$, aus $E \subseteq L$ folgt $\Delta_E|\Delta_L$, siehe 6.7. Aber Δ_K, Δ_L sind teilerfremd, also ist $|\Delta_E| = 1$ und nach dem Satz von Minkowski erhalten wir $E = \mathbb{Q}$. Aus $g \in \mathbb{Q}[X]$ folgt $g = f$, demnach hat g den Grad n und $[KL : L] = n$.

Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Ganzheitsbasis von K, und $y_1, \ldots, y_m$ eine Ganzheitsbasis von L. Es ist $x_1y_1, \ldots, x_ny_m$ ein Erzeugendensystem von KL als $\mathbb{Q}$-Vektorraum, also wegen $[KL : \mathbb{Q}] = nm$ eine $\mathbb{Q}$-Basis. Und diese $\mathbb{Q}$-Basis von KL enthält nur ganz Elemente. Wir berechnen die Diskriminante dieser Basis. Ist $\phi\colon KL \to \mathbb{C}$ ein Ring-Homomorphismus, so erhalten wir als Einschränkungen Ring-Homomorphismen $\phi|K\colon K \to \mathbb{C}$ und $\phi|L\colon L \to \mathbb{C}$. Die Zuordnung $\phi \mapsto (\phi|K, \phi|L)$ ist injektiv, wie man leicht nachweist. Es gibt nm Ring-Homomorphismen $\phi\colon KL \to \mathbb{C}$, es gibt n Ring-Homomorphismen $\sigma\colon K \to \mathbb{C}$ und m Ring-Homomorphismen $\tau\colon L \to \mathbb{C}$; es folgt, dass die Zuordnung $\phi \mapsto (\phi|K, \phi|L)$ alle Paare (σ, τ) liefert. Anders ausgedrückt: Zu jedem Ring-Homomorphismen $\phi\colon KL \to \mathbb{C}$ gibt es einen Ring-Homomorphismen $\sigma_i\colon K \to \mathbb{C}$ und einen Ring-Homomorphismen $\tau_j\colon L \to \mathbb{C}$ mit $\phi(xy) = \sigma_i(x)\tau_j(y)$ für $x \in K$ und $y \in L$.

Zur Berechnung der Diskriminante $\Delta(x_1y_1, \ldots, x_ny_m)$ arbeiten wir mit der Matrix mit Koeffizienten der Form $\phi(z)$, wobei ϕ die Ring-Homomorphismen $KL \to \mathbb{C}$ und $z = x_ky_l$ die Elemente der gegebenen Basis von KL durchläuft (und bilden das Quadrat der Determinante). Beachte: Diese Matrix ist eine $(nm)\times(nm)$-Matrix, wobei wir als Zeilenindizes die Paare (i, j), als Spaltenindizes die Paare (k, l) verwenden; wir betrachten also die Matrix $(\sigma_i(x_k)\tau_j(y_l))_{(i,j),(k,l)}$ und zwar:

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1y_1, \ldots, x_ny_m) &= \det(\sigma_i(x_k)\tau_j(y_l))^2 \\
&= \det((\sigma_i(x_k))_{ik} \otimes (\tau_j(y_l))_{jl})^2 \\
&= \Delta_K^m \cdot \Delta_L^n
\end{aligned}$$

(hier brauchen wir Tensor-Produkte von Matrizen).

Nachtrag zu 6.5: Berechnung von $\mathcal{O}_K/\langle p\rangle$.

Wir betrachten hier nur den Fall $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ für ein Element α.

Proposition. *Sei $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ und sei $h \in \mathbb{Z}[X]$ das Minimalpolynom von α. Sei $\overline{h} \in (\mathbb{Z}/p)[X]$ das zugehörige Polynom mit Koeffizienten modulo p. Schreibe*

$$\overline{h} = g_1^{m_1} \cdots g_t^{m_t}$$

mit irreduziblen, paarweise verschiedenen Polynomen $g_i \in (\mathbb{Z}/p)[X]$. Dann gilt in $\mathcal{O}_K$

$$\langle p\rangle = P_1^{m_1} \cdots P_t^{m_t},$$

mit paarweise verschiedenen Primidealen P_i und

$$\mathcal{O}_K/P_i^{m_i} = (\mathbb{Z}/p)[X]/\langle g_i^{m_i}\rangle,$$

also (nach dem chinesischen Restsatz):

$$(*)\quad \mathcal{O}_K/\langle p\rangle = \mathcal{O}_K/P_1^{m_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_K/P_t^{m_t} = (\mathbb{Z}/p)[X]/\langle g_1^{m_1}\rangle \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p)[X]/\langle g_t^{m_t}\rangle,$$

insbesondere ist der Trägheitsgrad von P_i gerade der Grad des Polynoms g_i und der zugehörige Verzweigungsindex ist m_i.

Beweis: Gezeigt wird $(*)$. Man hat nämlich die folgenden beiden Aussagen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_K/\langle p\rangle &= \mathcal{O}_K/P_1^{m_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_K/P_t^{m_t}\\
\mathcal{O}_K/\langle p\rangle &= (\mathbb{Z}/p)[X]/\langle g_1^{m_1}\rangle \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p)[X]/\langle g_t^{m_t}\rangle,
\end{aligned}$$

die erste ist die des chinesischen Restsatzes (für $\mathcal{O}_K$), die zweite verwendet zuerst Reduktion modulo p

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_K/\langle p\rangle &= \mathbb{Z}[X]/\langle h, p\rangle\\
&= (\mathbb{Z}/p)[X]/\langle \overline{h}\rangle\\
&= (\mathbb{Z}/p)[X]/\langle g_1^{m_1} \cdots g_t^{m_t}\rangle
\end{aligned}$$

und danach ebenfalls den chinesischen Restsatz (nun für den Hauptidealring $(\mathbb{Z}/p)[X]$):

$$(\mathbb{Z}/p)[X]/\langle g_1^{m_1} \cdots g_t^{m_t}\rangle = (\mathbb{Z}/p)[X]/\langle g_1^{m_1}\rangle \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p)[X]/\langle g_t^{m_t}\rangle.$$

Schliesslich vergleicht man die Faktoren des Rings $\mathcal{O}_K/\langle p\rangle$.