

Symmetrische Polynome mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring.

Definition: Ein Polynom $h \in R[T_1, \dots, T_n]$ heißt *symmetrisch*, wenn für jede Permutation π der Menge $\{1, \dots, n\}$ die folgende Gleichung gilt:

$$h(T_{\pi(1)}, \dots, T_{\pi(n)}) = h(T_1, \dots, T_n)$$

Das heißt: schreiben wir $h(T_1, \dots, T_n)$ als Linearkombination der Monome $T_1^{e_1} \cdots T_n^{e_n}$ mit Koeffizienten $c_{e_1, \dots, e_n} \in R$, so muss gelten:

$$c_{e_1, \dots, e_n} = c_{e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}},$$

für alle Permutationen π .

Satz. Seien $R \subseteq S$ kommutative Ringe, seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in S$ und sei $f = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ ein Polynom mit Koeffizienten in R . Sei $h \in R[T_1, \dots, T_n]$ symmetrisches Polynom in n Variablen mit Koeffizienten in R . Dann ist $h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R$.

Beweis: Dies liegt daran, dass sich jedes symmetrische Polynom in $R[T_1, \dots, T_n]$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ mit Koeffizienten in R schreiben lässt; dies sind die elementarsymmetrischen Polynome:

$$\begin{aligned} s_1(T_1, \dots, T_n) &= \sum T_i, \\ s_2(T_1, \dots, T_n) &= \sum_{i < j} T_i T_j \\ s_3(T_1, \dots, T_n) &= \sum_{i < j < k} T_i T_j T_k \\ &\vdots \\ s_n(T_1, \dots, T_n) &= T_1 T_2 \cdots T_n \end{aligned}$$

Die Auswertung der elementarsymmetrischen Polynome sind aber bis auf Vorzeichen die Koeffizienten des gegebenen Polynoms, da im Polynomring mit den Variablen $T_1, \dots, T_n, X$ gilt:

$$\prod_{i=1}^n (X - T_i) = X^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma_i(T_1, \dots, T_n) X^{n-i}.$$