Merkzettel: Ideale in kommutativen Ringen.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein *Ideal* I von R ist eine Untergruppe von $(R,+)$ mit folgender zusätzlicher Eigenschaft: Isr $r \in R, x \in I$, so ist $rx \in I$.

Bemerkungen:

(1) Offensichtlich sind $0 = \{0\}$ und R Ideale von R. Unter einem *echten* Ideal I versteht man ein Ideal $I \neq R$. Beachte: Ideale sind üblicherweise **keine** Unterringe: denn von einem Unterring wird vorausgesetzt, dass das Einselement 1_R im Unterring enthalten ist; das einzige Ideal I von R, das 1_R enthält, ist R selbst.

(2) *Ein kommutativer Ring $R \neq 0$ ist genau dann ein Körper, wenn R und 0 die einzigen Ideale sind.*

(3) Ist $a \in R$, so ist $Ra = \{ra \mid a \in R\}$ ein Ideal, man nennt es das von a erzeugte *Hauptideal.*

(4) Der Durchschnitt beliebig vieler Ideale von R ist wieder ein Ideal von R.

Ideale und Faktorringe. Ist I ein Ideal des Rings R, so bezeichnet man mit R/I die Menge der Restklassen von R modulo I (eine Restklasse von R modulo I ist eine Teilmenge von R der Form $x + I$ mit $x \in R$; die Restklassen von R modulo I bilden eine Partition von R; statt $x + I$ schreibt man meist $\overline{x}$). Man definiert auf R/I Addition und Multiplikation durch $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}; \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$; zu zeigen ist, dass dies wohldefiniert ist). Bezüglich dieser Addition und Multiplikation ist R/I ein Ring, man nennt ihn den *Faktorring modulo I,* und die kanonische Abbildung $x \to \overline{x}$ ist ein surjektiver Ring-Homomorphismus $R \to R/I$.

Ideale und Ring-Homomorphismen. Seien R, R' kommutative Ringe. Ist $\phi \colon R \to R'$ ein Ring-Homomorphismus, so ist $\mathrm{Ker}(\phi) = \{x \in R \mid \phi(x) = 0\}$ ein Ideal von R, man nennt dies den *Kern* von ϕ. Beispiel: Ist I ein Ideal von R, so ist der Kern des kanonischen Ring-Homomorphismus $R \to R/I$ gerade I. Weiter gilt: Ist $\phi \colon R \to R'$ ein Ring-Homomorphismus mit Kern I, so gibt es einen (und nur einen) Ring-Homomorphismus $\overline{\phi} \colon R/I \to R'$ mit $\overline{\phi}(\overline{x}) = \phi(x)$, und $\overline{\phi}$ ist injektiv.

Maximale Ideale. Ein Ideal I von R heißt *maximales* Ideal, falls erstens $I \neq R$ gilt und es zweitens kein Ideal I' mit $I \subset I' \subset R$ gibt (I ist also maximal bezüglich Inklusion in der Menge der **echten** Ideale von R). *Genau dann ist I maximales Ideal, wenn R/I ein Körper ist.*

Primideale. Ein Ideal I von R heißt Primideal, falls folgendes gilt: Sind $x, y \in R$ mit $xy \in I$, so ist x oder y in I. *Genau dann ist I ein Primideal, wenn R/I nullteilerfrei ist.* Offensichtlich gilt: *Maximale Ideale sind Primideale.*

Summen von Idealen. Seind I, I' Ideale von R, so ist $I + I' = \{x + x' \mid x \in I, x' \in I'\}$ ein Ideal; induktiv definiert man die Summe endlich vieler Ideale. Ein Ideal I heißt *endlich erzeugt,* wenn es eine Summe von endlich vielen Hauptidealen ist (wenn es also Elemente $a_1, \ldots, a_n$ gibt mit $I = \sum_{i=1}^n Ra_i$).

Produkte von Idealen. Sind I, I' Ideale von R, so setzt man $II' = \{\sum_i x_i y_i \mid x_i \in I, y_i \in I'\}$ (gebildet werden hier **endliche** Summe von Produkten der Form $x \in I, y \in I'$); man nennt dies das Produkt von I, I'; dies ist wieder ein Ideal.