Merkzettel: Endliche Körper-Erweiterungen.

Ist L ein Körper und K ein Unterkörper, so nennt man das Paar $L\colon K$ eine *Körper-Erweiterung.* (Achtung: man schreibt hier $L\colon K$ oder auch $L|K$, gesprochen: L *über* K, meint damit aber nur das Paar (L, K); es wird keinerlei Faktorbildung oder Ähnliches durchgeführt.)

Man nennt $L : K$ *endliche* Körper-Erweiterung, falls $\dim_K L$ endlich ist (beachte: bezüglich der Addition in L und der Einschränkung der Multiplikation in L auf $K \times L$ ist L ein K-Vektorraum). Man nennt $\dim_K L$ den *Grad der Körper-Erweiterung.*

Algebraische Elemente, Minimalpolynom. Sei $L : K$ eine Körpererweiterung. Ein Element $x \in L$ heißt *algebraisch über* K, fall es ein normiertes Polynom $f \in K[X]$ gibt mit $f(x) = 0$. Ist $x \in L$ algebraisch über K, so gibt es natürlich ein normiertes Polynom $f \in K[X]$ kleinsten Grads mit $f(x) = 0$; *dieses Polynom ist eindeutig bestimmt,* man nennt es das *Minimalpolynom von* x (über L).

Ist $x \in L$ algebraisch über K mit Minimalpolynom vom Grad n, so sind die Elemente $1, x, \ldots, x^{n-1}$ linear unabhängig über K und der K-Unterraum von L mit Basis $1, x, \ldots, x^{n-1}$ ist ein Unterkörper von L, man nennt ihn den *von* x *über* K *erzeugten* Unterkörper und bezeichnet ihn mit $K[x]$. (Hinweis: Offensichtlich ist der K-Unterraum $K[x]$ von L mit Basis $1, x, \ldots, x^{n-1}$ ein Unterring von L, denn das Minimalpolynom von x zeigt, dass gilt $x^n \in K[x]$. Als Unterring des Körpers L ist $K[x]$ nullteilerfrei. Ganz allgemein gilt: Ein nullteilerfreier Ring, der einen Unterkörper K besitzt und endlich-dimensional als K-Vektorraum ist, ist ein Körper.) Ist $L = K[x]$ für ein $x \in L$, so nennt man x ein *primitives* Element und $L\colon K$ eine *primitive* Körper-Erweiterung.

Sei immer noch $x \in L$ algebraisch über K, sei f das Minimalpolynom von x über K. Es gilt: f *ist ein irreduzibles Polynom,* demnach ist das von f erzeugte Hauptideal $(f) = K[X]f$ ein maximales Ideal im Polynomring $K[X]$ und die Auswertungsabbildung

$$\eta\colon K[X] \longrightarrow L \qquad \text{mit} \quad \eta(f) = f(x)$$

ist ein Ring-Homomorphismus mit Kern (f) und Bild $K[x]$. Wir erhalten also einen Körper-Isomorphismus $K[X]/(f) \to K[x]$.

Umgekehrt: Sei nun nur der Körper K gegeben und ein irreduzibles Polynom $f \in K[X]$ mit Grad n. Sei $(f) = K[X]f$ das von f erzeugte Hauptideal in $K[X]$; dies ist ein maximales Ideal in $K[X]$, also ist $K[X]/(f)$ ein Körper. Wir haben eine kanonische Einbettung von K in $K[X]/(f)$ (jedem $c \in K$ wird die Restklasse des konstanten Polynoms c zugeordnet), auf diese Weise fassen wir K als Unterkörper von $K[X]/(f)$ auf. Es ist $K[X]/(f)\colon K$ eine Körper-Erweiterung vom Grad n (die Restklassen der Monome $1, X, \ldots, X^{n-1}$ bilden eine K-Basis); offensichtlich ist also $K[X]/(f)$ von $x = \overline{X}$ erzeugt (und f ist das Minimal-Polynom von x über K). Insbesondere ist $K[X]/(f)\colon K$ eine primitive Körper-Erweiterung.

(Ist $n > 1$, so hat das irreduzible Polynom f in K keine Nullstelle — durch die Bildung des Körpers $K[X]/(f)$ erhalten wir in $K[X]/(f)$ eine Nullstelle von f nämlich $x = \overline{X}$; man nennt dies die **Kronecker'sche Konstruktion von Nullstellen**.)