Merkzettel: Moduln.

Sei R ein Ring. Ein R -Modul M (oder auch ${}_R M$) ist eine abelsche Gruppe (fast immer additiv geschrieben) mit einer zusätzlich gegebenen Abbildungen $\mu: R \times M \rightarrow M$, die als Skalar-Multiplikation bezeichnet wird, statt $\mu(r, m)$ schreibt man einfach rm oder auch $r \cdot m$, mit folgenden Eigenschaften:

- (1) μ ist biadditiv, es ist also $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$ und $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$ für $r, r_1, r_2 \in R$, $m, m_1, m_2 \in M$.
- (2) Es gilt $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$ und $1 \cdot m = m$ für alle $r_1, r_2 \in R$ und $m \in M$.

Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung des Vektorraum-Begriffs: Ist k ein Körper, so sind k -Moduln nichts anderes als k -Vektorräume. Jede abelsche Gruppe A ist in kanonischer Weise ein $\mathbb{Z}$ -Modul (ist $a \in A$, so ist wie üblich $2 \cdot a = a + a$, $(-3) \cdot a = -(a + a + a)$ usw). Ist R ein Ring, so kann man R als R -Modul auffassen (und schreibt, wenn notwendig, zur Verdeutlichung ${}_R R$): man nimmt als Skalar-Multiplikation die Ring-Multiplikation.

Untermoduln, Faktormoduln. Ist M ein R -Modul, so nennt man eine Untergruppe U von M einen R -Untermodul, falls gilt: Ist $u \in U, r \in R$, so ist $ru \in U$. (Ein Untermodul ist selbst wieder ein R -Modul). Ist R kommutativer Ring, so sind die Ideale von R nichts anderes als die R -Untermoduln von ${}_R R$ (für einen nicht notwendig kommutativen Ring sind die R -Untermoduln von ${}_R R$ gerade die sogenannten "Links Ideale").

Sind U, U' Untermoduln von M , so sind auch $U \cap U'$ und $U + U'$ Untermoduln (dagegen ist $U \cup U'$ nur dann ein Untermodul, wenn $U \subseteq U'$ oder $U' \subseteq U$ gilt).

Ist U Untermodul von M , so ist die Faktorgruppe M/U wieder ein R -Modul, wenn man definiert $r \cdot \bar{m} = \overline{rm}$ für $r \in R, m \in M$ (dabei bezeichnen wir wie üblich mit $\bar{m} = m + U$ die Restklasse von m modulo U ; zu zeigen ist, dass dies wohldefiniert ist), man nennt M/U den *Faktormodul* von M modulo U .

Ist $m \in M$, so ist $Rm = \{rm \mid r \in R\}$ ein Untermodul von M , man nennt ihn *den von m erzeugten* Untermodul; allgemeiner nennt man $\sum_{i=1}^t Rm_i$ den von den Elementen $m_1, \dots, m_t \in M$ erzeugten Untermodul. Gibt es zu M eine endliche Menge von Elementen $m_1, \dots, m_t \in M$ mit $M = \sum_{i=1}^t Rm_i$ so nennt man M *endlich erzeugt*; ist $t = 1$ so nennt man M *zyklischen Modul*.

Sei U ein Untermodul des Moduls M . Die Untermoduln von M/U sind von der Form M'/U , wobei $M' \subseteq M$ ein Untermodul ist, der U enthält; sind M', M'' Untermoduln von M mit $U \subseteq M'$ und $U \subseteq M''$, und ist $M'/U = M''/U$, so ist $M' = M''$ (die Zuordnung $M' \mapsto M'/U$ ist also eine Bijektion zwischen den Untermoduln von M , die U enthalten und den Untermoduln von M/U .)

Ketten-Bedingungen. Ein R -Modul M heißt *noethersch*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Es gilt die *aufsteigende Kettenbedingung* für Untermoduln: Jede aufsteigende Folge von Untermoduln wird stationär (Ist $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ eine abzählbare Folge von Untermoduln, so gibt es n mit $M_n = M_{n+1} = \dots$.)
- (ii) Es gilt die *Maximal-Bedingung* für Untermoduln: Ist $\mathcal{M}$ eine nicht-leere Menge von Untermoduln von M , so gibt es in $\mathcal{M}$ ein maximales Element (es gibt also

$M' \in \mathcal{M}$ mit folgender Eigenschaft: Ist $M'' \in \mathcal{M}$ und $M' \subseteq M''$, so ist $M' = M''$).

(iii) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.

Ein R -Modul M heißt *artinsch*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Es gilt die *absteigende Kettenbedingung* für Untermoduln: Jede absteigende Folge von Untermoduln wird stationär.
- (ii) Es gilt die *Minimal-Bedingung* für Untermoduln: Ist $\mathcal{M}$ eine nicht-leere Menge von Untermoduln von M , so gibt es in $\mathcal{M}$ ein minimales Element.

(Hier gibt es keine so einfach zu formulierende dritte Bedingung, wie die der endlichen Erzeugbarkeit aller Untermoduln bei noetherschen Moduln!)

Beachte: Ist $R = k$ ein Körper, so sind ja die k -Moduln nichts anderes als die k -Vektorräume. Ein Vektorraum ist genau dann noethersch, wenn er endlich-dimensional ist, also genau dann, wenn er artinsch ist. — Ist dagegen etwa $R = \mathbb{Z}$, so gibt es noethersche Moduln, die nicht artinsch sind: ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ selbst; es gibt aber auch artinsche $\mathbb{Z}$ -Moduln, die nicht noethersch sind.

Lemma. *Sei M ein Modul, sei U Untermodul. Genau dann ist M noethersch, wenn U und M/U beide noethersch sind. Genau dann ist M artinsch, wenn U und M/U beide artinsch sind.*

Beweisidee: Untermoduln von U sind Untermoduln von M . Statt Untermoduln von M/U zu betrachten, schaut man sich die Untermoduln von M an, die U enthalten: Gilt eine der Kettenbedingungen für die Untermoduln von M , so eben auch für die Untermoduln von U , wie auch die Untermoduln von M , die U enthalten (und damit für die Untermoduln von M/U).

Nicht ganz offensichtlich ist nur die Umkehrung: aus Kettenbedingungen für U und für M/U will man die entsprechende Kettenbedingung für M erhalten. Seien also Untermoduln $M' \subseteq M''$ von M gegeben. sie liefern Untermoduln $M' \cap U \subseteq M'' \cap U$ von U , aber auch Untermoduln $M' + U \subseteq M'' + U$ von M , die U enthalten. Zu zeigen ist: *Ist $M' \cap U = M'' \cap U$ und $M' + U = M'' + U$, so ist $M' = M''$.* Sei also $x \in M''$. Wegen der zweiten Gleichung sieht man: $x \in M'' \subseteq M' + U$, also $x = y + u$ mit $y \in M'$ und $u \in U$. Es ist $u = x - y$, und $x \in M''$, $y \in M' \subseteq M''$, also $x - y \in M''$ und damit $u = x - y \in M'' \cap U = M' \cap U$. Also $u \in M'$ und demnach $x = y + u \in M'$.

Ein Modul S heißt *einfach* (oder *irreduzibel*), wenn $S \neq 0$ gilt und 0 und S die einzigen Untermoduln von S sind. Ein Modul M hat *endliche Länge*, wenn es eine Kette

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

gibt, bei der alle Moduln M_i/M_{i-1} einfach sind, für $1 \leq i \leq n$ (man nennt diese Untermodulkette eine *Kompositionsreihe* von M und n die Länge von M (der **Satz von Jordan-Hölder** besagt, dass dies eine wohlbestimmte Zahl ist).

Lemma. *Ein Modul ist genau dann gleichzeitig artinsch und noethersch, wenn er endliche Länge hat.*