Homomorphismen. Seien M_1, M_2 R-Moduln. Ein *Modul-Homomorphismus* (oder einfach ein *Homomorphismus*) ist eine Abbildung $\eta\colon M_1 \to M_2$, die mit der Addition und der Skalar-Multiplikation verträglich ist (es gilt also $\eta(m+m') = \eta(m)+\eta(m')$, $\eta(rm) = r\eta(m)$ für $m, m' \in M_1$ und $r \in R$; dies verallgemeinert den Begriff einer linearen Transformation zwischen zwei Vektorräumen). Injektive Homomorphismen nennt man *Monomorphismen*, surjektive Homomorphismen *Epimorphismen;* bijektive Homomormorphismen nennt man *Isomorphismen.* Beachte: Ist $\eta\colon M_1 \to M_2$ bijektiver Homomorphismus, so ist die mengentheoretische Umkehrabbildung wieder ein Homomorphismus! Ist $\eta\colon M_1 \to M_2$ ein Homomorphismus, so setzt man $\operatorname{Ker}(\eta) = \{m \in M_1 \mid \eta(m) = 0\}$ und nennt dies den *Kern* von η, entsprechend nennt man $\operatorname{Bild}(\eta) = \{\eta(m) \mid m \in M_1\}$ das *Bild* von η. Der Kern von η ist ein Untermodul von M_1, das Bild von η ist ein Untermodul von M_2 und es gilt: *η induziert einen Isomorphismus $\overline{\eta}\colon M_1/\operatorname{Ker}(\eta) \longrightarrow \operatorname{Bild}(\eta)$ mit $\overline{\eta}(\overline{m}) = \eta(m)$ für $m \in M_1$.*

Direkte Summen von Moduln. Sind M_1, M_2 R-Moduln, so ist die *direkte Summe* $M_1 \oplus M_2$ folgendermaßen definiert: Die unterliegende abelsche Gruppe ist die Menge der Paare (m_1, m_2) mit $m_1 \in M_1$ und $m_2 \in M_2$ mit komponentenweiser Addition; auch die Skalar-Multiplikation erfolgt komponentenweise, also $r(m_1, m_2) = (rm_1, rm_2)$ für $r \in R, m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$. Man kann M_1 mit $M_1 \oplus 0$ identifizieren, dies ist ein Untermodul von $M_1 \oplus M_2$, der zugehörige Faktormodul $(M_1 \oplus M_2)/(M_1 \oplus 0)$ kann offensichtlich mit M_2 identifiziert werden. Es folgt: *Genau dann ist $M_1 \oplus M_2$ noethersch, wenn M_1 und M_2 beide noethersch sind.* Und entsprechend gilt: *Genau dann ist $M_1 \oplus M_2$ artinsch, wenn M_1 und M_2 beide artinsch sind.*

Induktiv kann man für R-Moduln $M_1, \dots M_n$ die direkte Summe $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ (man schreibt auch $\bigoplus_{i=1}^n M_i$) bilden. Sind alle Moduln M_i noethersch, so ist auch die direkte Summe noethersch, usw. Ist M ein R-Modul, so schreibt man M^n statt $\bigoplus_{i=1}^n M$. Insbesondere interessiert man sich für die R-Moduln $R^n = \bigoplus_{i=1}^n {}_RR = {}_RR \oplus \cdots \oplus {}_RR$, man nennt dies den *freien* R-Modul vom Rang n. Die Elemente von R^n sind gerade die n-Tupel $(r_1, \dots, r_n)$ mit $r_i \in R$. Offensichtlich bilden die Elemente $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ ein Erzeugendensystem von R^n, denn $(r_1, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n r_i e_i$. *Genau dann ist M ein endlich erzeugter R-Modul, wenn es einen Epimorphismus $R^n \to M$ für eine natürliche Zahl n gibt.* Beweis: Gibt es einen Epimorphismus $\eta\colon R^n \to M$, so bilden die Elemente $\eta(e_1), \dots, \eta(e_n)$ ein Erzeugendensystem von M. Ist umgekehrt $m_1, \dots, m_n$ ein Erzeugendensystem, so definiere $\phi\colon R^n \to M$ durch $\phi(r_1, \dots, r_n) = \sum r_i m_i$; dies ist ein Homomorphismus, und natürlich ist ϕ surjektiv.

Insbesondere gilt: *Ist R ein noetherscher Ring, so ist jeder endlich erzeugte R-Modul M noethersch.* Beweis: Es gibt einen Epimorphismus $\eta\colon R^n \to M$ für ein n. Sei U sein Kern. Da ${}_RR$ noetherscher Modul ist, ist auch R^n noetherscher Modul, also auch der Faktor-Modul R^n/U, dieser ist aber zu M isomorph.

Annullierende Ideale. Ist M ein R-Modul und ist I ein Ideal von R mit $xm = 0$ für alle $x \in R, m \in M$, so kann man M als R/I-Modul auffassen, mit der Skalar-Multiplikation $\overline{r} \cdot m = \overline{rm}$ für $r \in R, m \in M$ (zu zeigen ist hier wieder: dies ist wohl-definiert). Beachte: Die R-Untermodul von M sind nichts anderes als die R/I-Untermoduln von M.