Lemma (Dedekind). *Sei H eine Halbgruppe, Ω ein Körper. Paarweise verschiedene Halbgruppen-Homomorphismen $H \to (\Omega, \cdot)$ sind linear unabhängig über Ω.* (Hier bezeichnen wir mit $(\Omega, \cdot)$ die multiplikative Halbgruppe von Ω).

Das heißt: Sind die Halbgruppen-Homomorphismen $\sigma_1, \dots, \sigma_t \colon H \to (\Omega, \cdot)$ paarweise verschiedene und sind Skalare $c_i \in \Omega$ mit

$$\sum\nolimits_{i=1}^{t} c_i \sigma_i(h) = 0 \qquad \text{für alle } \ h \in H$$

gegeben, so gilt $c_i = 0$ für $1 \leq i \leq t$.

Beweis: Die Halbgruppe H sei multiplikativ geschrieben, das neutrale Element wird also mit 1_H bezeichnet.

Angenommen, die Abbildung $\sum_{i=1}^{t} c_i \sigma_i \colon H \to \Omega$ ist die Nullabbildung. Mit Induktion nach t wird gezeigt: es ist $c_i = 0$ für alle i. Dies ist klar für $t = 1$ (denn ein Halbgruppen-Homomorphismus bildet das Einelement 1_H auf die $1 \in \Omega$ ab; also $0 = c_1\sigma_1(1_H) = c_1$). Sei nun $t \geq 2$. Wir können annehmen, dass $c_i \neq 0$ für alle i gilt. Da $\sigma_1 \neq \sigma_t$, gibt es $a \in H$ mit $\sigma_1(a) \neq \sigma_t(a)$. Wir erhalten die folgenden beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} c_1\sigma_1(a)\sigma_1(h) + c_2\sigma_2(a)\sigma_2(h) + \cdots + c_t\sigma_t(a)\sigma_t(h) &= 0 \\ c_1\sigma_t(a)\sigma_1(h) + c_2\sigma_t(a)\sigma_2(h) + \cdots + c_t\sigma_t(a)\sigma_t(h) &= 0 \end{aligned}$$

(die erste erhält man aus $\sum_{i=1}^{t} c_i\sigma_i(ah) = 0$, indem man verwendet, dass σ_i multiplikativ ist; die zweite, indem man $\sum_{i=1}^{t} c_i\sigma_i(h)$ mit $\sigma_t(a)$ multipliziert). Subtraktion liefert eine Linearkombination von $\sigma_1, \dots, \sigma_{t-1}$, wobei der Koeffizient von σ_1 gleich $c_1(\sigma_1(a) - \sigma_t(a))$, also von Null verschieden ist. Dies widerspricht der Induktionsannahme.