Übungsaufgaben 12

1. Albinismus, der auf ein rezessives Allel a zurückgeht, tritt bei uns mit einer relativen Häufigkeit $z = 5 \cdot 10^{-5}$ auf (d.h. also: auf 100 000 Menschen kommen 5 Albinos). Mit welcher relativen Häufigkeit ist der Genotyp Aa verbreitet (wieviele Leute sind also "versteckte (halbe) Albinos")? (Es soll vorausgesetzt werden, daß das **Hardy-Weinberg-Gesetz** gilt, also Zufälligkeit der Paarung bezüglich des Merkmals Pigmentierung.)

2. Betrachten Sie die folgenden drei Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$
$$g(x,y) = (x-2)^2 + (y+1)^2 + 1$$
$$h(x,y) = -x^2 - (y-1)^2 + 1$$

Zeichnen Sie jeweils ein (aussagekräftiges) Höhenlinien-Diagramm (entweder mit der Hand oder mit dem Computer); beschreiben Sie die Höhenlinien mit Worten.

3. Die Fibonacci-Folge. Es sei $a_1 = a_2 = 1$. Induktiv definiert man für $i \geq 2$

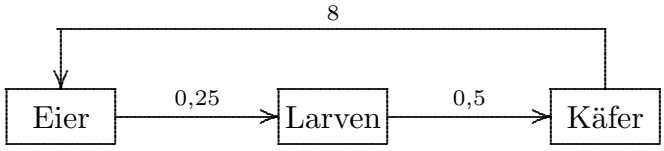
$$a_i = a_{i-2} + a_{i-1}.$$

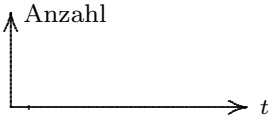
(a) Notieren Sie die Zahlen a_i für $1 \leq i \leq 20$ und berechnen Sie jeweils $b_i = a_{i+1}/a_i$. (Es fällt auf, daß die Zahlen b_i gegen eine positive Zahl b zu konvergieren scheinen. Dies kann man auch beweisen, und zwar erhält man als Grenzwert eine positive Zahl b die folgende Bedingung erfüllt: $b = \frac{1}{b} + 1$.)

(b) Zeigen Sie: die einzige positive Zahl b mit $b = \frac{1}{b} + 1$ ist $b = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

(c) Dieses b ist auch die einzige positive Zahl mit $\frac{1}{b} = \frac{b}{1+b}$.

4. (Nach Kroll-Reiffert-Vaupel) Das folgende Pfeildiagramm bescheibe die monatliche Entwicklung einer Population aus Käfern, Larven und Eiern:



(Bedeutung der Pfeile: nach einem Monat schlüpfen aus den Eiern Larven, nach einem weiteren Monat werden aus Larven Käfern, diese legen nach einem Monat Eier und sterben dann; die Zahlenangaben besagen: aus 25 % der Eier entstehen Larven (die anderen werden von Tieren gefressen oder verenden); von den Larven entwickelt sich die Hälfte zu Käfern, die anderen sterben; jeder Käfer legt 8 Eier.

Es gebe anfänglich $x = 40$ Eier, $y = 20$ Larven und $z = 12$ Käfer. Skizzieren Sie die Entwicklung über einen Zeitraum von 12 Monaten: man zeichne also drei stückweise lineare Funktionen und zwar im gleichen Koordinatensystem