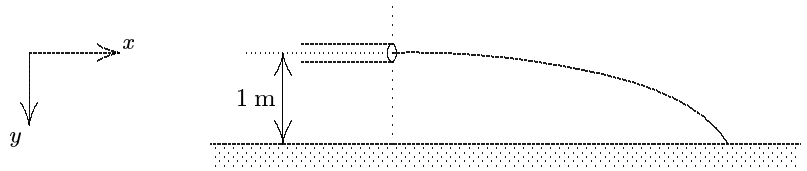
Quadratische Funktionen.

Zur Erinnerung:
Fallbeschleunigung g = 9,81 m/sec^2 $\approx$ 10 m/sec^2,
Schallgeschwindigkeit c = 330 m/sec.

1. Ein Stein fällt in einen Brunnen, dessen Wasseroberfläche 50 m unter der Erdoberfläche liegt.

(a) Wie lange braucht der Stein, um das Wasser zu erreichen? (b) Mit welcher Geschwindigkeit [km/h] kommt er an der Wasseroberfläche an? (c) Wie lange dauert es (gerechnet vom Beginn des Falls), bis man oben den Aufprall hört?

2. Betrachte die Wasserteilchen eines in einem Meter Höhe waagrecht ausströmenden Strahls



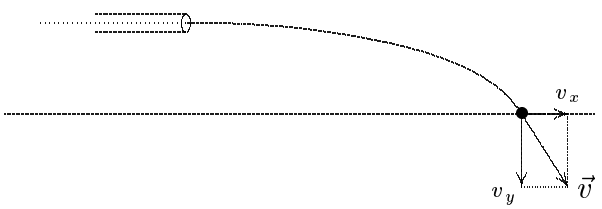
(Sie bewegen sich in horizontaler Richtung (x-Richtung) gemäß einer linearen, in vertikaler Richtung (y-Richtung) gemäß einer quadratischen Funktion – wegen der Fallbeschleunigung).

(a) Bestimme den Ort, an dem das Wasser den waagrechten Boden berührt, falls es mit der Geschwindigkeit $10\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ausströmt.

(b)Wie schnell muß es ausströmen, um den Boden im (horizontalen) Abstand von 2 Metern zu treffen?

(c) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Wasserstrahl auf den Boden?

Hinweis: Hier ist die **Vektoraddition** der Horizontal-Geschwindigkeit v_x und der Vertikal-Geschwindigkeit v_y zu verwenden:



Die gesuchte Geschwindigkeit ist die Länge von $\vec{v}$, also $|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$.

3. Eine Sportlerin übt Hochsprung. Sie läßt jeweils messen, wie lange sie in der Luft ist. Einmal wird als Zeit 1,6 [sec] gemessen. Wie hoch ist sie demnach gesprungen? Und mit welcher Endgeschwindigkeit ist sie auf dem Boden gelandet? (Vor allem aber: Warum freut sie sich? oder auch: Warum traut sie der Messung nicht?)

Quadratische Funktionen: Lösungen.

1. Die Bewegungsgleichung für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung lautet

$$s(t) = a + bt + \frac{c}{2}t^2,$$

dabei ist c die Beschleunigung. In unserem Fall ist c die Fallbeschleunigung, also $c = g = 9{,}81\,\mathrm{m/sec^2}$. Es sei $t = 0$ der Zeitpunkt, zu dem der Stein fallen gelassen wird: da b die Anfangsgeschwindigkeit ist, ist $b = 0$ (denn der Stein wird nicht geworfen, sondern nur losgelassen, seine Anfangsgeschwindigkeit ist also Null). Auch können wir $a = 0$ voraussetzen: wir nehmen die Raumposition, wo der Stein losgelassen wird, als Ursprung. Also können wir annehmen:

$$\boxed{s(t) = \frac{g}{2}t^2 \quad \text{mit} \quad g = 9,8\ \mathrm{m/sec^{-2}}}$$

Es ist $s(t) = 50\mathrm{m}$, also $t^2 = \frac{1}{5}\mathrm{sec^2/m} \cdot 50\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{sek^2}$, also $t = \sqrt{10}$ sek $= 3{,}16$ sec.

Dabei verwenden wir: **Bewegung ist nur abhängig von der Erdbeschleunigung (Naturkonstante) und der Fallhöhe, nicht jedoch vom Gewicht oder Ähnlichem.**

Geschwindigkeit = Ableitung der Weg-Zeit-Funktion $s(t)$, also

$$\boxed{v(t) = gt}$$

also: $v(3,16\ \mathrm{sec}) = 10 \cdot 3,16\ \mathrm{m/sec} = 31{,}6\ \mathrm{m/sec} = 31{,}6 \cdot 60 \cdot 60/1000\ \mathrm{km/h} = 113$ km/h.
Nebenbemerkung: **Man sollte sich merken:**

$$\boxed{1\ \mathrm{m/sec} = 3,6\ \mathrm{km/h}}$$

Hier eine Tabelle: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Beschleunigung $g = 10\,\mathrm{m/sec^2}$. Aus der Ruhelage wird nach der Zeit t der Weg $s(t)$ zurückgelegt:

t	1	2	3	4	5	sec
s	5	20	45	80	125	m

Schallgeschwindigkeit: b = 330 m/sec. Also Bewegungsgleichung des Schalls:

$$s(t) = b \cdot t$$

(bei der Fortbewegung des Schalls handelt es sich um eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit), also $t = \frac{1}{b}s$, also $t = \frac{1}{330}50$ m $= 0{,}15$ sec. Insgesamt: 3,16 sec + 0,15 sec = 3,3 sec.

2. Unabhängigkeit der Bewegungen in x-Richtung und in y-Richtung. (a) Wir berechnen zuerst die Zeit, die gebraucht wird für die vertikale Bewegung (denn die ist nur abhängig von der Fallhöhe = 1m).

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2 \quad \text{mit} \quad g = 9,8 \text{ m/sec}^{-2}.$$

Es ist $s(t) = 1\text{m}$, also $t^2 = \left(\frac{1}{5}\text{sec}^2/\text{m}\right)\left(1\text{m}\right) = 0.2\,\text{sek}^2$, also $t = 0,45$ sec.

Horizontale Bewegung in 0,45 sec bei einer Geschwindigkeit von $b = 10$ m/sec: In 0,45 sec werden 10*0,45 m = 4,5 m zurückgelegt.

(b) Die Vetikalbewegung ändert sich nicht. Horizontalbewegung: gleiche Bewegungsgleichung $s(t) = bt$, gesucht ist $b = s/t$, also $b = 2 \text{ m}/0,45 \text{ sec} = 4{,}4$ m/sec.

Endgeschwindigkeit im Fall (a):
Horizontal-Geschwindigkeit 10 m/sec,
vertikal: Fallgeschwindigkeit nach 0,45 sec ist $v_y = g \cdot 0,45$ sec = 4,5 m/sec.
Also: $|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{10^2 + 4,5^2}$ m/sec $= \sqrt{120}$ m/sec = 11 m/sec.

3. Zeit für die Aufwärtsbewegung = Zeit für die Abwärtsbewegung, also Zeit für die Aufwärts- wie die Abwärtsbewegung ist 0,8 sec. Welche Entfernung legt man in 0,8 sec zurück?

t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	sec
s	0.05	0.2	0.45	0.8	1.25	1.8	2.45	3.2	4	5	m

Also: 3,2 m. (Der Weltrekord liegt - für Frauen - bei 2,09 m)

Endgeschwindigkeit: Wie bei Aufgabe 1.