

### Aufgaben 12.

1. Betrachten Sie die folgenden drei Funktionen  $f, g, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

$$g(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + 1$$

$$h(x, y) = -x^2 - (y - 1)^2 + 1$$

Zeichnen Sie jeweils ein (aussagekräftiges) Höhenlinien-Diagramm (ohne Verwendung eines Computer-Programms); beschreiben Sie die Höhenlinien auch mit Worten.

2. Beschreiben Sie die Höhenlinien (zum Beispiel mit Excel) für folgende Funktionen  $F_1, F_2: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_1(x, y) = \frac{\exp(x) \exp(y)}{xy}, \quad F_2(x, y) = \frac{\exp(x) \exp(y)}{x^2 y^2}.$$

3. Bestimmen Sie die Tangentialebene an das Paraboloid

$$\{(x, y, z) \mid z = -x^2 - y^2 + 10\}$$

in den Punkten  $(1, 1, 8)$  und  $(-1, 3, 0)$ .

4. Betrachten Sie folgende Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot (x + y - 1) = x^2 y + x y^2 - x y.$$

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion. Welche dieser Punkte sind lokale Minima oder lokale Maxima?

(b) Man bestimme in der  $x$ - $y$ -Ebene die Nullstellenmenge der Funktion  $f$ , und markiere die entstehenden Gebiete durch  $+$  (falls  $f$  dort positive Werte) oder  $-$  (falls  $f$  negative Werte annimmt).