Aufgabenzettel 1

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Es gibt keine Primzahl p mit

$$n! + 2 \leq p \leq n! + n$$

(es gibt demnach beliebig große Lücken zwischen den Primzahlen).

2. Im Buch *Schlüssel zur Mathematik* von **Neunzert** und **Rosenberger** liest man auf Seite 111:

Oft ist es aber auch so, dass man durch Herumspielen mit Beispielen eine Vermutung findet, der man aber nicht so recht traut. Dann muss man diese Vermutung beweisen oder durch ein Gegenbeispiel widerlegen. Dazu wieder ein einfaches Beispiel. Man interessiert sich für Primzahlen (Homo ludens!), schreibe sie hin:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, \ldots$$

merkt, dass die Lücken zwischen den Zahlen größer werden. Vielleicht hören die Primzahlen irgendwann auf, gibt es eine größte Primzahl? Man kann vermuten, dass es eine größte, letzte Primzahl p_N gibt, oder man kann das Gegenteil vermuten. Es ist leicht zu beweisen, dass es eine solche größte Primzahl nicht geben kann: Sind nämlich $p_1, p_2, \ldots, p_N$ alle Primzahlen, dann ist auch $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_N + 1$ eine Primzahl (überlegen Sie einmal, warum dies so ist), und diese Zahl ist größer als p_N. Problem - Vermutung - Beweisidee (die Konstruktion von $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_N + 1$) - ein typischer Dreierschritt der mathematischen Arbeit.

Seien $p_1 < p_2 < \cdots < p_N$ die ersten N Primzahlen. Geben Sie die ersten 10 Zahlen N an, für die $r_N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_N + 1$ **keine** Primzahl ist, und notieren Sie die Primfaktorzerlegung dieser Zahlen r_N. (Man verwende zum Beispiel MAPLE: vorzulegen sind bei solchen Aufgabenstellungen die Befehlszeilen und die Ergebnisse.)

3. (a) Zeige: Ist $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, so ist jeder Primteiler p von $n! + 1$ wie auch von $n! - 1$ eine Primzahl mit $n < p$.

(b) Gesucht sind diesmal 10 Werte von n, sodass $n! - 1$ oder $n! + 1$ eine Primzahl ist (zum Beispiel mit MAPLE).

4. Sei $1 < m \in \mathbb{N}$. Zeige: die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(i) m ist Primzahl.

(ii) Ist $m' \neq 1$ ein Teiler von m, so ist $m' > \sqrt{m}$.

Hier das Kleingedruckte:

Pro Woche gibt es (meist am Donnerstag) einen Aufgabenzettel mit vier Aufgaben, die bis zum folgenden Donnerstag, 8:10 gelöst werden sollen. Bitte ins Postfach des jeweiligen Tutors werfen.

Am Ende des Semesters wird eine Klausur (2 Termine) geschrieben.

Voraussetzung für die Vergabe von Leistungspunkten:

(1) Die regelmäßige aktive Teilnahme an den Übungsgruppen, die das Lösen von Übungsaufgaben einschließt. (Dabei sollen die wöchentlichen Aufgaben **alle** bearbeitet werden, mindestens die Hälfte der Aufgaben sollte richtig gelöst sein).

(2) Als benotete Einzelleistung die Klausur.

Die Lösungen sind auf Blättern im DIN A4-Format **in deutlich lesbarer Form** abzugeben (Name und Übungsgruppe nicht vergessen). Die Abgabe der Lösungen kann in Zweiergruppe erfolgen; dabei wird davon ausgegangen, daß **jeder der beiden** bereit ist, die Aufgaben in der Übungsstunde vorzurechnen und zu erläutern.

Präsenz-Aufgaben 1: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

2. Beweis: Zeige: Zu jeder natürlichen Zahl $n > 2$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p < n!$.

3. Beweis (Métrod 1917) : Seien $p_1, \dots, p_t$ paarweise verschiedene Primzahlen, sei $t \geq 2$. Bilde $m = p_1 \cdots p_t$ und $u = \sum_{i=1}^{t} \frac{m}{p_i}$. Zeige: $u > 1$ ist eine ganze Zahl, keine der Primzahlen $p_1, \dots p_t$ teilt u.

4. Beweis (Stieltjes 1890): Seien $p_1, \dots, p_t$ paarweise verschiedene Primzahlen mit $t \geq 1$. Sei $0 \leq s \leq t$. Bilde $u = p_1 \cdots p_s + p_{s+1} \cdots p_t$. Zeige: Keine: $u > 1$ ist eine ganze Zahl, keine der Primzahlen $p_1, \dots p_t$ teilt u.
(Zusatzfrage: Dies verallgemeinert den Euklid'schen Beweis, warum?)

5. Beweis (Schon 1984): Sei $n \geq 1$. Zeige: die Zahlen $1 + n!d$ mit $1 \leq d \leq n$ sind paarweise teilerfremd.

6. Beweis (Hurwitz 1891): Bilde induktiv Zahlen wie folgt: $w_1 = 2$ und $w_t = w_1 \cdots w_{t-1} + 1$. Zeige: Die Zahlen w_i (mit $i \in \mathbb{N}$) sind paarweise teilerfremd.
(Unwichtig, aber doch interessant: Wie lauten die Zahlen w_{10} und w_{20}?)