Aufgabenzettel 2. Abgabe: Do, 29.10.2006, 8:10.

2.1. Die Primfaktorzerlegung von $n!$. (a) Zeige mit Hilfe der Legendre-Formel: Sind $p < q$ Primzahlen, so ist $w_p(n!) \ge w_q(n!)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Folgerung: Seien $p_1 < p_2 < \cdots < p_t$ die ersten t Primzahlen. Es sei $n! = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}$ mit $e_t > 0$. Dann ist $e_1 \ge e_2 \ge \cdots \ge e_t$.

(c) Zeige: $e_t = 1$, falls $n \ge 2$.

(d) Bestimme alle Zahlen $n \ge 3$ mit $e_{t-1} > 1$.

2.2. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige:

(a) $0 \le x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 2$.

(b) Ist $0 \le x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 1$, so ist $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

(c) Ist dagegen $1 \le x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 2$, so ist $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

(d) Zusatzfrage: Was ist die Bedeutung von $x - \lfloor x \rfloor$?

2.3. Teiler von $\binom{m}{n}$. Wir betrachten den Binomialkoeffizienten $\binom{m}{n}$, mit $0 \le n \le \frac{1}{2}m$. Sei p eine Primzahl. Zeige:

(a) Ist $m - n < p \le m$, so ist p ein Teiler von $\binom{m}{n}$. (Dies verallgemeinert unsere Aussage (1).)

(b) Ist $\frac{1}{3}m < p$ und $p \le n$, so ist p kein Teiler von $\binom{m}{n}$ (Dies verallgemeinert unsere Aussage (2).)

(c) Immer gilt $\binom{m}{n}_p \le m$. (Dies verallgemeinert unsere Aussage (3).) Wie lautet die entsprechende Aussage zu $(3')$?

2.4. Sei p eine Primzahl, sei $t \ge 1$ eine natürliche Zahl. Gesucht ist eine Vermutung für $\binom{p^t}{n}_p$ für $0 \le n \le p^t$. Dazu schaue man sich zumindest alle Fälle mit $p^t \le 50$ und $t \ge 2$ an (Maple). (Gesucht ist diesmal nur eine Vermutung, und die entsprechenden Maple-Ausdrucke, noch nicht der Beweis.)

Präsenz-Aufgaben.

1. Aufgaben zur Legendre-Formel:

(a) Bestimme mit Hilfe der Legendre-Formel $(100!)_3$.

(b) Wieviele Endnullen hat 110! (in der Darstellung im Zehner-System).

(c) Für welche n besitzt $n!$ in der Dezimaldarstellung genau 6 Endnullen?

(d) Zeige: Ist p eine Primzahl, so ist $w_p(n!) \ne p$ für alle natürlichen Zahlen n.

(e) Man zeige, dass es neben p noch weitere natürliche Zahlen gibt, die nicht als Werte $w_p(n!)$ auftreten können.

2. Welche der folgenden Primzahlen sind Teiler von $\binom{300}{150}$?

127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179

Translation:

2.1. (a) Use the Legendre formula in order to show: If $p < q$ are prime numbers, then $w_p(n!) \geq w_q(n!)$ for every natural number n.

(b) Consequence: If $p_1 < p_2 < \cdots < p_t$ are the first t primes and $n! = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}$ with $e_t > 0$, then $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_t$.

(c) Show: $e_t = 1$, if $n \geq 2$.

(d) Find all numbers $n \geq 3$ with $e_{t-1} > 1$.

2.2. Let $x, y \in \mathbb{R}$. Show:

(a) $0 \leq x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 2$.

(b) If $0 \leq x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 1$, then $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

(c) If $1 \leq x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 2$, then $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

(d) Additional question: What is the meaning of $x - \lfloor x \rfloor$?

2.3. Consider the binomial coefficient $\binom{m}{n}$, with $0 \leq n \leq \frac{1}{2}m$. Let p be a prime. Show:

(a) If $m - n < p \leq m$, then p is a divisor of $\binom{m}{n}$. (This generalizes the assertion (1).)

(b) If $\frac{1}{3}m < p$ und $p \leq n$, then p is not a divisor of $\binom{m}{n}$ (This generalizes the assertion (2).)

(c) Always, we have $\binom{m}{n}_p \leq m$. (This generalizes the assertion (3).) Formulate and proof the assertion corresponding to $(3')$?)

2.4. Let p be a prime, let $t \geq 1$ be anatural number. We are looking for a conjecture concerning the value of $\binom{p^t}{n}_p$ for $0 \leq n \leq p^t$. Consider at least all the cases with $p^t \leq 50$ and $t \geq 2$ (say using MAPLE). (We ask only for the formulation of a conjecture as well as the corresponding MAPLE outprints, but not yet for a proof).

Routine exercises.

1. Use of the Legendre formula:

(a) Determine $(100!)_3$.

(b) Determine the number of final zeros in the decimal presentation of 110!

(c) Determine all numbers n such that the decimal presentation of $n!$ has precisely 6 zeros at the end.

(d) Show: if p is a prime, then $w_p(n!) \neq p$ for all natural numbers n.

(e) Show that besides p also other numbers cannot occur as values $w_p(n!)$.

2. Which of the following primes are divisors of $\binom{300}{150}$?

127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179