Aufgabenzettel 6.

6.1. Fasern der Eulerschen ϕ-Funktion.

(a) Bestimme alle Zahlen n mit $\phi(n) = 24$.

(b) Zeige: Zu jeder Zahl t gibt es nur endliche viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $\phi(n) = t$.

(c) Sei $s(t)$ die Kardinalität der Menge $\{n \mid \phi(n) = t\}$ (in (b) haben wir gesehen, dass dies eine endliche Menge ist). Man bestimme die jeweils kleinste natürliche Zahl t, sodass $s(t) = 0, \quad 2, \quad 3, \quad$ oder $\quad 4$ ist. (Man vermutet, dass es kein t mit $|\{n \mid \phi(n) = t\}| = 1$ gibt.)

6.2. Die Zweifachen in einer abelschen Gruppe $(G, +)$, die Quadrate in einer abelschen Gruppe $(G, \cdot)$.

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe, additiv geschrieben. Wir betrachten $2G := \{2g \mid g \in G\}$ (dabei ist natürlich $2g = g + g$), also die Menge der *Zweifachen* in G. Zeige:

(1) Es ist $2G$ immer eine Untergruppe von G.
(2) Ist G endlich, und ist $|G|$ ungerade, so ist $2G = G$.
(3) Ist G zyklisch, und ist $|G|$ gerade, so ist $|2G| = \frac{1}{2}|G|$.
(4) Sind $(G, +), (H, +)$ abelsche Gruppen, so ist $2(G \times H) = 2G \times 2H$.

Zusatz. Nun sei $(G, \cdot)$ eine multiplikativ geschriebene abelsche Gruppe. Man formuliere die entsprechenden Aussagen (1) - (4). Hier betrachten wir also $G^2 = \{g^2 \mid g \in G\}$ - die Menge der *Quadratzahlen* (oder einfach *Quadrate*) in G.

6.3. Sei $(G, \cdot)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Zeige:

(a) Es gibt genau n Gruppen-Homomorphismen $G \to (C^*, \cdot)$.

(b) Sei $\widehat{G}$ die Menge dieser Gruppen-Homomorphismen. Definiere auf dieser Menge eine Multiplikation folgendermaßen: Sind $\chi, \chi' \in \widehat{G}$, so sei $\chi\chi'$ durch $(\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g)$ definiert. Zeige: Mit dieser Multiplikation ist $\widehat{G}$ eine Gruppe.

(c) $\widehat{G}$ ist zyklisch.

6.4. Sei Φ die Menge der Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Neben der in der Vorlesung definierten Faltung $*$ definieren wir auf Φ auch eine Addition, nämlich punktweise, also $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f, g \in \Phi$. Man zeige, dass Φ ein kommutativer Ring, der nullteilerfrei ist. (Erinnerung: ein Ring R heißt nullteilerfrei, wenn aus $rr' = 0$ mit $r, r' \in R$ folgt, dass $r = 0$ oder $r' = 0$ gilt.)

6.1. (a) Determine all numbers n with $\phi(n) = 24$. (b) Show: Given a number t, there are only finitely many natural numbers n with $\phi(n) = t$. (c) Let $s(t)$ be the cardinality of the set $\{n \mid \phi(n) = t\}$ (according to (b), this is a finite set).

In the following cases, determine the smalles natural number t such that $s(t) = 0, \quad 2, \quad 3, \quad \text{oder} \quad 4$. (One conjectures that there is no t with $s(t) = 1$.)

6.2. Doubling in an abelian group $(G,+)$, squaring in $(G,\cdot)$.

(a) Let $(G,+)$ be an abelian group, written with addition. Let $2G := \{2g \mid g \in G\}$ (here $2g = g+g$). Show:

(1) $2G$ is a subgroup of G.
(2) If G is finite, and $|G|$ is odd, then $2G = G$.
(3) If G is cyclic and $|G|$ is even, then $|2G| = \frac{1}{2}|G|$.
(4) If $(G,+),(H,+)$ are abelian groups, then $2(G \times H) = 2G \times 2H$.

(b) Now let $(G,\cdot)$ be an abelian group, written with multiplication. Formulate the corresponding assertions (1) - (4), now using $G^2 = \{g^2 \mid g \in G\}$ - this set is called the set of squares in G.

6.3. Let $(G,\cdot)$ be a cyclic group of order n. Show

(a) There are precise n group homomorphisms $G \to (C^*,\cdot)$.
(b) Let $\widehat{G}$ be the set of these group homomorphisms. Define on $\widehat{G}$ a multiplication as follows: If $\chi,\chi' \in \widehat{G}$, then $(\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g)$. Show: With this multiplication, Φ is a group.
(c) Claim: $\widehat{G}$ is cyclic.

6.4. Let Φ be the set of maps $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. In addition to the convolution $*$ we also consider an addition $+$ on Φ, namely pointwise addition defined by $(f+g)(n) = f(n)+g(n)$ for $n \in \mathbb{N}$ and $f,g \in \Phi$. Show that in this way Φ is a commutative ring without zero-divisors. (Recall that a ring R is said to be without zero-divisors provided $rr' = 0$ with $r,r' \in R$ implies that $r = 0$ or $r' = 0$.)

Präsenz-Aufgaben.

P6.1. (Die Eulersche ϕ-Funktion: Werte und Fasern).

(a) Ist $\phi(n) = p$ eine Primzahl, so ist $p = 2$.
(b) Ist $\phi(n) = p^t$ für eine Primzahl p und $t \in \mathbb{N}$, so ist $p = 2$.
(c) Bestimme alle n mit $\phi(n) = 4$.
(d) Bestimme alle n mit $\phi(n) = 6$.

P6.2. Sei z eine ganze Zahl.

(a) Für jede abelsche Gruppe $(G,\cdot)$ definiere eine Abbildung $\sigma_z\, G \to G$ durch $\sigma_z(g) = g^z$. Sei $G_z = \{g \in G \mid \sigma_z(g) = 1.\}$

Zeige: σ_z ist ein Gruppen-Homomorphismus, G_z ist Untergruppe von G. Und zeige auch: Sind G,H abelsche Gruppen, so ist $(G \times H)_z = G_z \times H_z$.

P6.3. Für $1 \le n \le 12$ und $n = 16, 25, 27$ markiere man auf dem Einheitskreis alle Elemente von $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ der Ordnung n (= die primitiven n-ten Einheitswurzeln).

Hat man für ein festes n alle primitiven n-ten Einheitswurzeln gezeichnet, so trage man in die gleiche Zeichnung auch alle primitiven d-ten Einheitswurzeln mit $d|n$ ein. Was erhält man? Die Fälle $n = 9, 25, 27$ (aber auch $8, 16$) verwende man zur Illustration der Formel $\phi(p^t = (p-1)p^{t-1}$.

P6.4. Sei $E(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Berechne $E * E$ und $E * E * E$.