Aufgabenzettel 8.

8.1. Sei a_n die Endziffer der Zahl n^n (in der Dezimaldarstellung). Zeige, dass die Folge $a_1, a_2, \ldots$ periodisch ist und gib eine volle Periode an.

8.2. Ist f eine zahlentheoretische Funktion, so definieren wir f' durch $f'(n) = f(n)\ln(n)$. Zeige für zahlentheoretische Funktionen f, g

(a)
$$(f * g)' = f * g' + f' * g$$

(b) Die folgende Funktion Λ heißt Mangoldt-Funktion:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{falls} \quad n \text{ Potenz der Primzahl } p \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige: $\Lambda * U = U'$, also $\Lambda = U' * \mu$. (Hier ist U wieder die Funktion $U(n) = 1$ für alle n, und $\mu = U^{-1}$ die Möbius-Funktion.)

8.3. Sei $t \in \mathbb{N}_0$. (a) Sei $t \in \mathbb{N}_0$. Ist $(G, \cdot)$ abelsche Gruppe, so definieren wir eine Abbildung $f_t \colon G \to G$ durch $f_t(g) = g^t$. Sei $G_t = \{g \in G \mid f_t(g) = 1.\}$

Zeige: f_t ist ein Gruppen-Homomorphismus, G_t ist Untergruppe von G. Und zeige auch: Sind G, H abelsche Gruppen, so ist $(G \times H)_t = G_t \times H_t$.

(b) Definiere eine zahlentheoretische Funktion k_t folgendermaßen: $k_t(n)$ ist die Anzahl der natürlichen Zahlen a mit $1 \le a \le n$, die zu n teilerfremd sind, und für die gilt $a^t \equiv 1 \mod n$. Zeige, dass k_t multiplikativ ist und dass für jede ungerade Primzahl und $d \in \mathbb{N}$ gilt: $k_t(p^d) = (d, \phi(p^d))$. Wie sieht $k_t(2^d)$ aus?

8.4. Mit C_n bezeichnen wir eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Sei $G = C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_t}$ mit geraden Zahlen $n_1, \ldots, n_t$.

(a) Zeige: in G gibt es genau $2^t - 1$ Elemente der Ordnung 2.

(b) Folgere: G ist nicht das Produkt von $t-1$ zyklischen Gruppen.

(c) Zeige: Sind $p_1, \ldots, p_t$ paarweise verschiedene ungerade Primzahlen mit $t \ge 2$, und ist $n = p_1 \cdots p_t$, so ist $U(\mathbb{Z}/n, \cdot)$ nicht zyklisch.

Präsenz-Aufgaben.

P8.1. Berechne die Restklassencharaktere modulo $k = 10$.

P8.2. Sei ζ eine primitive n-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ und $G = \langle \zeta \rangle$ (also die von ζ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{C}^*$). Sei $0 \le t < n$.

(a) Zeige: Es gibt genau einen Charakter $\chi \in \widehat{G}$ mit $\chi(\zeta) = \zeta^t$, wir bezeichnen ihn mit χ_t. (Es ist also $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$.)

(b) Es gilt $\chi_t(g) = g^t$ für alle $g \in G$.

(c) Was besagt die Orthogonalitätsrelation $\sum_{g \in G} \chi_t(g) = \ldots$?

(d) Was besagt die Orthogonalitätsrelation $\sum_{t \in \widehat{G}} \chi_t(g) = \ldots$?

(Die beiden Orthogonalitätsrelationen sind umzuschreiben als Aussagen über Summen von Potenzen von ζ.)

(e) Da die n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ die Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$ sind, kennt man ohne Rechnung die Summe dieser Einheitswurzeln — wieso?

(f) Seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ die n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Ist $n = 3$, so zeige man geometrisch, dass $\sum z_i = 0$ gilt. Entsprechend zeige man dies für n gerade.

P8.3. Berechne die Endziffer von 7^{222} (in der Dezimaldarstellung).

P8.4. (a) Gesucht ist ein n mit $\mu(n) + \mu(n+1) + \mu(n+2) = 1$.

(b) Gesucht sind ein n mit $\mu(n) + \mu(n+1) + \mu(n+2) = \mu(n+1) + \mu(n+2) + \mu(n+3) = \mu(n+2) + \mu(n+3) + \mu(n+4) = 1$.

(c) Zeige: Für jedes n gilt $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$.

8.1. Let a_n be the last digit of n^n in its decimal presentation. Show: The sequence $a_1, a_2, \ldots$ is periodic.

8.2. For f a numbertheoretical function, define f' by $f'(n) = f(n)\ln(n)$. Show for numbertheoretical functions f, g:

(a) $(f * g)' = f * g' + f' * g.$.

(b) The function Λ with $\Lambda(n) = \ln(p)$ in case n is a power of the prime p and $\Lambda(n) = 0$ otherwise, is called Mangoldt function. Show that $\Lambda * U = U'$, thus $\Lambda = U' * \mu$.

8.3. Let $t \in \mathbb{N}_0$. (a) If $(G, \cdot)$ is an abelian group, then we define a map $f_t \colon G \to G$ by $f_t(g) = g^t$. Let $G_t = \{g \in G \mid f_t(g) = 1.\}$ Show; f_t is a group homomorphism, G_t is a subgroup of G. Also: If G, H are abelian groups, then $(G \times H)_t = G_t \times H_t$.

(b) Define a numbertheoretical function k_t as follows: $k_t(n)$ is the number of natural numers a with $1 \le a \le n$, which are prime to n, and such that $a^t \equiv 1 \mod n$. Show that k_t is multiplikative and that for any odd prime number p and $d \in \mathbb{N}$ the following is satisfied: $k_t(p^d) = (d, \phi(p^d))$. What is $k_t(2^d)$?

8.4. Let C_n be the cyclic group pf order n. Let $G = C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_t}$, with even numbers $n_1, \ldots, n_t$.

(a) Show: in G there are precisely $2^t - 1$ elements of order 2.

(b) Corollary: G cannot be written as a product of $t-1$ cyclic groups.

(c) Corollary: If $p_1, \ldots, p_t$ are pairwise different odd primes, with $t \ge 2$, then for $n = p_1 \cdots p_t$, the group $U(\mathbb{Z}/n, \cdot)$ is not cyclic.