Aufgabenzettel 9.

9.1. (a) Man zeige direkt (also ohne Verwendung des Dirichlet-Satzes), dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Zu je zwei teilerfremden natürlichen Zahlen a, k gibt es eine Primzahl $p > a$ mit $p \equiv a \mod k$.

(ii) Zu je zwei teilerfremden natürlichen Zahlen a, k gibt es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv a \mod k$.

(b) Man folgere aus dem Dirichlet-Satz die folgende Behauptung: *Sei $s \in \mathbb{N}$. Sind $a, k \in \mathbb{N}$ teilerfremd, so gibt es unendlich viele Zahlen n, die Produkt von genau s paarweise verschiedenen Primzahlen sind und sodass gilt $n \equiv a \mod n$.*

9.2. Sei χ ein Restklassen-Charakter modulo k, aber nicht Hauptcharakter. In der Vorlesung wurde gezeigt: Sind $u \leq v$ natürliche Zahlen, so gilt $|\sum_{n=u}^{v} \chi(n)| \leq k$. Zeige, dass sogar gilt: $|\sum_{n=u}^{v} \chi(n)| \leq \frac{1}{2}\phi(k)$.

9.3. (Jacob Bernoulli). Man zeige $\zeta(2) < 2$ mit Hilfe der Abschätzung $n^2 \geq \frac{n(n+1)}{2}$ für alle n.

9.4. Das Wachstum der harmonischen Reihe.

(a) Für $1 \leq t \leq 21$ und $s = 10^t$ gebe man einen Näherungswert von $H_s = \sum_{n=1}^{s} \frac{1}{n}$ an.

(b) Bekanntlich ist $\ln(x)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$. Verwende Untersummen und Obersummen um zu zeigen:

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

9.1. (a) Show directly (i.e. without using the Dirichlet-Theorem): the following assertions are equivalent:

(i) If a, k are natural numbers which are coprime, then there is a prime $p > a$ with $p \equiv a \mod k$.

(ii) If a, k are natural numbers which are coprime, then there are infinitely many primes p with $p \equiv a \mod k$.

(b) Show that the Dirichlet-Theorem implies the following assertion: *Let $s \in \mathbb{N}$. If $a, k \in \mathbb{N}$ are coprime, then there are infinitely many numbers n with $n \equiv a$* $\mod n$ *such that n is the product of precisely s pairwise different prime numbers.*

9.2. Let χ be a residue character modulo k which is not a main character (Hauptcharakter). The lecturer has shown: If $u \leq v$ are natural numbers, then $|\sum_{n=u}^{v} \chi(n)| \leq k$. Improve this inequality by showing $|\sum_{n=u}^{v} \chi(n)| \leq \frac{1}{2}\phi(k)$.

9.3. (Jacob Bernoulli). Show that $\zeta(2) < 2$ using the inequality $n^2 \geq \frac{n(n+1)}{2}$ für alle n.

9.4. The growth of the harmonic series.
(a) For $1 \leq t \leq 21$ and $s = 10^t$ provide an estimate for $H_s = \sum_{n=1}^{s} \frac{1}{n}$.

(b) It is well-known that $\ln(x)$ is an antiderivative for $\frac{1}{x}$. Use lower and upper Darboux sums in order to show:

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

Präsenz-Aufgaben.

P9.1. Man gebe "kleine" natürliche Zahlen m an, sodass $H_m \geq 1000$, $H_m \geq 1\,000\,000$ und $H_m \geq 1\,000\,000\,000$ gilt. (H_m wurde in den Aufgaben 7.5 und 9.4 definiert.)

P9.2. (a) Zeige: Die folgenden Eigenschaften für $n \in \mathbb{N}$ sind äquivalent:
(i) Die Zahl n ist quadratfrei,
(ii) Es ist $\mu(n) \neq 0$,
(iii) Es ist $\mu(n)^2 = 1$.

(b) Sei k die Anzahl der Primteiler von n. Zeige: $\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^k$.

P9.3. Sei $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ zahlentheoretischen Funktion. In der Vorlesung wurde gezeigt: Ist α stark multiplikativ, so ist $\alpha^{-1} = \alpha\mu$ (dabei ist α^{-1} die bezüglich der Faltung $*$ zu α inverse Funktion. Zeige, dass für eine multiplikative Funktion α die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) α ist stark multiplikativ,
(ii) $\alpha^{-1} = \alpha\mu$.
(iii) $\alpha^{-1}(p^t) = 0$ für alle Primzahlen p und $t \geq 2$.

P9.4. (a) Seien $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ arithmetische Funktion und $s < s'$ reelle Zahlen. Zeige: Ist die Dirichlet-Reihe $\sum_n \frac{\alpha(n)}{n^s}$ absolut konvergent, so ist auch $\sum_n \frac{\alpha(n)}{n^{s'}}$ absolut konvergent.

(b) Gibt es $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $\alpha(n) \neq 0$ für alle n, sodass $\sum_n \frac{\alpha(n)}{n^s}$ für alle s absolut konvergent ist?