Aufgabenzettel 10.

10.1. Ein Spezialfall des Dirichlet-Satzes (wie schon die Aufgabe 4.4(b)): *Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form* $4n+1$ *mit* $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige: Ist n eine natürliche Zahl und p ein ungerader Teiler von n^2+1, so ist $n^2 \equiv -1 \mod p$, also ist -1 ein quadratischer Rest modulo p und demnach $p \equiv 1 \mod 4$.

(b) Unter Verwendung von (a) beweise man den oben genannten Spezialfall.

10.2. Die Primteiler der Fermat'schen Zahlen. Es sei daran erinnert, dass man $F_n = 2^{2^n}+1$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ die n*-te Fermat'sche Primzahl* nennt.

(a) Zeige: Ist p ein Primteiler von F_n, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $p = k \cdot 2^{n+1}+1$.

Hinweis: Betrachte die Ordnung von $\overline{2}$ in $(\mathbb{Z}/p)^*$.

(b) Die Zahl $F_5 = 2^{32}+1$ ist keine Primzahl. Man verwende (a), um mögliche Teiler von F_5 zu suchen. Ohne viel Mühe findet man auf diese Weise einen Teiler — welchen?

10.3. Seien $p \neq q$ Primzahlen und a, b natürliche Zahlen. Sei $n = p^a q^b$.

(a) Zeige: $\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1}$.

(b) Folgere daraus: Sind p, q ungerade, so ist jede Zahl $n = p^a q^b$ defizient (dabei heißt eine Zahl n defizient, wenn $\sigma(n) < 2n$ gilt).

10.4. Beispiele. Gesucht sind 20 Zahlen $n > 5040$ mit $\frac{\sigma(n)}{n\ln(\ln(n))} > 1,7$ und die Primfaktorzerlegung von n. Was fällt auf?

Präsenz-Aufgaben:

P10.1. Zeige: Jedes echte Vielfache einer vollkommenen oder abundanten Zahl ist abundant.

P10.2. Man zeige: $\liminf_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n} = 1$.

p10.3 Zeige: $\phi(n)\sigma(n) < n^2$ für alle $n \geq 2$.

P10.4. Zeige: Jede gerade vollkommene Zahl n ist ein Binomialkoeffizient $n = \binom{m}{2}$.

P10.5. Da 30 keine Primzahl ist, ist auch $M_{30} = 2^{30} - 1 = 1073741823$ keine Primzahl. Welche Teiler von M_{30} liefert der Beweis?

P10.6. Sei f multiplikativ. Für welche $c \in \mathbb{C}$ ist auch cf multiplikative?

10.1. A special case of the Dirichlet theorem: *There are infinitely many primes of the form $4n+1$ with $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Claim: If n is a natural number and p an odd prime divisor of n^2+1, then $n^2 \equiv -1 \mod p$, thus -1 is a quadratic residue class modulo p and therefore $p \equiv 1 \mod 4$.

(b) Use (a) in order to show the special case mentioned above.

10.2. The prime divisors of the Fermat numbers. By definition, a Fermat number is of the form $F_n = 2^{2^n} + 1$ with $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Show: If p is a prime divisor of F_n, then there is $k \in \mathbb{N}$ with $p = k \cdot 2^{n+1} + 1$.

Hint: Consider the order of $\overline{2}$ in $(\mathbb{Z}/p)^*$.

(b) The number $F_5 = 2^{32} + 1$ is not a prime: Use (a) in order to determine possible prime divisors of F_5.

10.3. Let $p \neq q$ prime numbers a, b natural numbers. Let $n = p^a q^b$.

(a) Claim: $\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1}$.

(b) Use (a) in order to show the following: If p, q are odd primes, then all numbers $n = p^a q^b$ are deficient. (a number n is called deficient provided $\sigma(n) < 2n$).

10.4. Examples. Find 20 numbers $n > 5040$ such that $\frac{\sigma(n)}{n \ln(\ln(n))} > 1,7$. Look at the prime factorization of these numbers n. What can be noticed?