Aufgabenzettel 11.

Sei $Q = \{n \mid \text{ es gibt } x, y \in \mathbb{Z} \text{ mit } x^2 + y^2 = n\}$.

11.1. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Menge Q unter der Multiplikation abgeschlossen ist. Gilt dasselbe auch für die folgenden Mengen? (Jeweils Beweis oder Gegenbeispiel).

$$\{n \mid \text{ es gibt } x, y \in \mathbb{Z} \text{ mit } x^2 + y^2 = n, \text{ und } n \text{ gerade}\},$$
$$\{n \mid \text{ es gibt } x, y \in \mathbb{N} \text{ mit } x^2 + y^2 = n\},$$
$$\{n \mid \text{ es gibt } x, y, z \in \mathbb{Z} \text{ mit } x^2 + y^2 + z^2 = n\},$$
$$\{n \mid \text{ es gibt } x, y \in \mathbb{Z} \text{ mit } x^3 + y^3 = n\}.$$

11.2. (a) Sind $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ und ist $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n$, so zeige $n \not\equiv 7 \mod 8$.

(b) Sei $x^2 + y^2 = z^2$ mit ganzen Zahlen x, y, z. Dann ist eine der Zahlen x, y durch 3 teilbar, und eine der Zahlen x, y, z ist durch 5 teilbar.

11.3. (a) Ist $n \in \mathbb{N}$ Summe der Quadrate zweier rationaler Zahlen, so ist $n \in Q$.

(b) Zeige: Die rationale Zahl $\frac{1}{2}$ kann auf unendlich viele Weisen als Summe der Quadrate zweier rationaler Zahlen geschrieben werden.

Hinweis: Sind $a, b \in \mathbb{N}$ und ist $ab = c^2 + d^2$, so zeige man $\frac{a}{b} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{d}{b}\right)^2$.

11.4. Maple. (a) Man bestimme die erste natürliche Zahl n, die sich gleichzeitig als Summe von $1, 2, 3, 4$ positiven Quadratzahlen schreiben lässt.

(b) Zeige: Die einzigen Zahlen $n \leq 169$, die sich nicht als Summe von fünf positiven Quadratzahlen schreiben lassen, sind die Zahlen $1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 33$.

Präsenzaufgaben.

P11.1. Man verwende die Faktorisierung $377 = 13 \cdot 29$ um 377 auf zwei wesentlich verschiedene Weisen als Summe von zwei Quadraten zu schreiben.

P11.2. Man entscheide, welche der folgenden Zahlen sich als Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen schreiben lassen (eine explizite Summendarstellung wird nicht erwartet):

$$11\,000, 12\,000, 13\,000, 14\,000, 15\,000, 16\,000, 17\,000, 18\,000, 19\,000, 20\,000.$$

P11.3. Gesucht sind Elemente $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$ mit gleicher Norm, die aber nicht assoziiert sind.

P11.4. Man bestimme alle Elemente $z \in \mathbb{Z}[i]$, für die z und $-z$ assoziiert sind.

Und: Fragen zu den Routine-Zetteln 1 und 2, und zum Rechnen in $Z[i]$.