Aufgabenzettel 12

12.1. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige: die Menge

$$\{n \in R \mid \text{ es gibt } x_i \in R \text{ mit } \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = n\}$$

ist abgeschlossen unter Multiplikation.

12.2. Behauptung: Keine der Zahlen der Form $8 \cdot 4^n$ lässt sich als Summe von vier positiven Quadratzahlen schreiben.

Anleitung: Induktion nach n. Beim Induktionsschritt zeige man: Ist $8 \cdot 4^n = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$ mit ganzen Zahlen $x_1, \ldots, x_4$, so sind alle diese Zahlen x_i gerade Zahlen (man rechne dazu modulo 8).

12.3. (a) Man zeige, dass sich jede natürliche Zahl $n \geq 170$ als Summe von fünf positiven Quadratzahlen schreiben lässt. Hilfe: Wende den Satz von Lagrange auf $n - 169$ an. Beachte, dass sich 169 auf ganz verschiedene Weisen als Summe von Quadraten schreiben lässt, siehe Aufgabe 11.4 (b).

Man verwende (a) und die Aufgabe 11.4 (b) um zu zeigen, dass es nur ganz wenige natürliche Zahlen m gibt, die sich nicht als Summe von sechs positiven Quadratzahlen schreiben lassen. Welche sind dies?

12.4. Zeige: Eine ganze Zahl z lässt sich genau dann als Differenz der Quadrate zweier ganzer Zahlen schreiben, wenn $z \not\equiv 2 \mod 4$.

Hilfe: Ist $z = a^2 - b^2$, so unterscheide man, ob a oder b gerade oder ungerade ist. Beginnt man umgekehrt mit $z \not\equiv 2 \mod 4$, so ist z entweder durch 4 teilbar oder aber ungerade ....

Zusatz: Zeige: Eine ganze Zahl z lässt sich genau dann als Differenz der Quadrate zweier natürlicher Zahlen schreiben, wenn erstens $z \not\equiv 2 \mod 4$ und zweitens $z \notin \{1, 4\}$.

Präsenz-Aufgaben.

P12.1. Bestimme die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma(n) = 24$. (Erinnerung: $\gamma(n)$ ist die Anzahl der Paare $[x, y] \in \mathbb{Z}^2$ mit $x^2 + y^2 = n$.

P12.2. Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + y^2 = n$, seien $m, s \in \mathbb{N}$ mit $n = ms^2$. Zeige: Es gibt $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ mit $x_0^2 + y_0^2 = m$.

P12.3. Schreibe $2 + 4i \in \mathbb{Z}[i]$ als Produkt von Prim-Elementen.

P12.4. Zeige: Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^4$ besitzt unendlich viele Lösungen $[x, y, z] \in \mathbb{N}^3$.