Aufgabenzettel 13

13.1. Sei x, y, z ein primitives pythagoräisches Tripel. Zeige

(a) Genau eine der Zahlen x, y ist durch 3 teilbar. Genau eine der Zahlen x, y, z ist durch 5 teilbar.

(b) Für jeden Primteiler p von z gilt $p \equiv 1 \mod 4$.

(c) Es ist $z \equiv 1 \mod 12$ oder $z \equiv 5 \mod 12$.

(d) Ist x gerade, so sind $z - x$ und $\frac{1}{2}(z - y)$ Quadrate.

13.2. Sei $u \in \mathbb{N}$ ungerade, $g \in \mathbb{N}$ gerade. (a) Zeige:

$$u^2 + \left(\frac{u^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{u^2 + 1}{2}\right)^2,$$

$$g^2 + \left(\frac{g^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{g^2}{4} + 1\right)^2.$$

Man erhält also auf diese Weise pythagoräische Tripel.

(b) Erhält man auf diese Weise alle pythagoräischen Tripel?

(Beide Konstruktionen gibt es bei FIBONACCI, *Liber quadratorum*, die erste schon by Pythagoras, die zweite bei Platon).

13.3. (a) Ist p Primzahl mit $p \equiv 3 \mod 4$, so gibt es kein Paar $x, y \in \mathbb{Z}^2$ mit

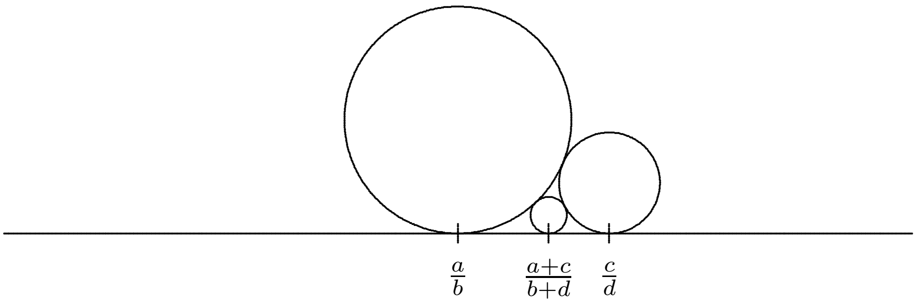
$$x^2 - py^2 = -1.$$

(b) Sei $p > 2$ Primzahl. Zeige: Die kleinste natürliche Zahl q mit $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ ist eine Primzahl.

13.4. Ford'sche Kreise. Ist $\frac{p}{q}$ ein gekürzter Bruch, so sei $K(\frac{p}{q})$ der Kreis in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $[\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}]$ und Radius $\frac{1}{2q^2}$.

Zeige: Sind $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ gekürzte Brüche, so haben die Kreise $K(\frac{a}{b})$ und $K(\frac{c}{d})$ nie innere Punkte gemeinsam. Sie berühren sich genau dann, wenn $cb - ad = 1$ gilt.

Interpretiere die folgende Skizze und zeichne die Ford'schen Kreise für alle gekürzten Brüche $\frac{p}{q}$ mit $0 \leq p \leq q = 5$.



Präsenz-Aufgaben.

P13.1. Man bestimme alle pythagoräischen Tripel (x, y, z) mit

$$z = 31 \qquad \text{und} \qquad z = 37.$$

P13.2. Man berechne mit den Regeln (K), (M), (Z) und (R) die folgenden Legendre-Symbole:

$$\left(\tfrac{26}{41}\right), \quad \left(\tfrac{125}{1009}\right), \quad \left(\tfrac{6557}{7919}\right)$$

P13.3. Gesucht sind 5 Primzahlen $p > 1000$ mit $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$.

P13.4. Gesucht ist die kleinste Primzahl q mit $3 < q$, sodass 3 quadratischer Rest modulo q, aber q nicht quadratischer Rest modulo 3 ist.

P13.5. Sei $p > 2$ Primzahl. Zeige: Ist g Primitivwurzel modulo p, so ist $\left(\frac{g}{p}\right) = -1$.