Noch ein Übungszettel (zu den Themen der letzten beiden Wochen)

N1. Betrachte die Ringe $R = \mathbb{Z}/n$ mit $n = 2, 3, 5, 19, 97$. Wieviele Quadrate gibt es jeweils? (Gesucht ist also die Anzahl der Elemente $r \in R$ mit $r = s^2$ für ein $s \in \mathbb{R}$.)

N2. Gesucht ist die kleinste Primzahl q mit $5 < q$, sodass 5 quadratischer Rest module q, aber q kein quadratischer Rest modulo 5 ist. (Antwort, mit Begründung.)

N3. Sei $n \in \mathbb{N}$, setze $q = 2n + 1$. Zeige: Ist q eine Primzahl und gilt $\left(\frac{2}{q}\right) = 1$, so ist q ein Teiler von $M_n = 2^n - 1$.

N4. Sind die Mersenne-Zahlen $M_{131} = 2^{131} - 1$ und $M_{143} = 2^{143} - 1$ Primzahlen?

(Hinweis: Hier darf natürlich eine Primzahltabelle verwendet werden.)

N5. Man berechne $\left(\frac{5}{11}\right)$ auf zwei verschiedene Weisen: (a) mit dem Euler-Kriterium. (b) mit dem Reziprozitätsgesetz.

N6. Seien $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ Farey-Nachbarn. Zeige oder widerlege: Auch $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ sind Farey-Nachbarn.

N7. Wir betrachten die Farey-Folge:

$$\mathcal{F}_n = \{\ 0 = \tfrac{p_0}{q_0} < \tfrac{p_1}{q_1} < \cdots < \tfrac{p_t}{q_t} = 1\ \}.$$

Zeige: $\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{q_{i-1}q_i} = 1$, und interpretiere dies geometrisch.

N8. Man gebe Farey-Nachbarn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (gekürzt) an, für die $b, d > 4$ und

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{4}\sqrt{10} < \frac{c}{d}$$

gilt. (Hinweis: $\frac{1}{4}\sqrt{10} \approx 0,79057$.)

N9. Wieviele Elemente besitzt die Farey-Folge $\mathcal{F}_{10}$?