1. Die Riemann'sche ζ -Funktion.

Im Euler'schen Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, haben wir für paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \dots, p_t$ die Menge $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(p_1, \dots, p_t)$ der natürlichen Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung nur die Primzahlen $p_1, \dots, p_t$ auftreten (mit beliebigen Multiplizitäten), betrachtet und gezeigt:

$$\sum_{n \in \mathcal{Z}} \frac{1}{n} = \prod_{i=1}^t \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_i}\right)^j = \prod_{i=1}^t \frac{1}{1 - p_i^{-1}},$$

dabei verwenden wir: Ist p eine Primzahl, so konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^j$ und es ist $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^j = \frac{1}{1 - p^{-1}}$.

Gerne würden wir ganz allgemein schreiben:

$$(!) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = \prod_p \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^j = \prod_{i=1}^t \frac{1}{1 - p^{-1}}$$

(wobei p alle Primzahlen durchläuft) aber hier handelt es sich um divergente Reihen (nämlich die harmonische Reihe) und um divergente unendliche Produkte!

Immerhin gilt aber für jede reelle Zahl $s > 1$

$$(*) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \prod_p \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^s}\right)^j = \prod_{i=1}^t \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

(alles konvergiert!), dies gilt sogar für alle komplexen Zahlen s mit Realteil $\Re(s) > 1$.

Man nennt diese Funktion (in Abhängigkeit von s)

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s}$$

die *Riemannsche ζ -Funktion*.

In der Funktionentheorie lernt man, dass eine solche Funktion eine (eindeutig bestimmte) *analytische Fortsetzung* besitzt; die **Riemannsche Vermutung** (1859) lautet: *alle nicht-reellen Nullstellen z der analytischen Fortsetzung haben Realteil $\Re(z) = \frac{1}{2}$* . Viele Fragen der Zahlentheorie (zum Beispiel Restgliedabschätzungen im Primzahlsatz) können bisher nur unter Annahme der Riemannschen Vermutung beantwortet werden.

Die Riemannsche Vermutung gilt als eines der wichtigsten ungelösten Probleme der Mathematik, es ist eines der sieben Millenniums-Probleme des Clay Mathematics Institute