2. Der Primzahlsatz.

Der Primzahlsatz (Hadamard, de la Vallée Poussin) besagt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln(n)}{n} = 1.}$$

Zur Erinnerung: $\pi(x)$ ist der Anzahl der Primzahlen p mit $p \leq x$. Dies ist einer der berümtesten Sätze der Mathematik. Vermutet wurde dieser Satz von Gauß, bewiesen wurde er 1895 von Hadamard und de la Vallée Poussin. Der Beweis ist nicht ganz einfach.

Umformulierung: Sind Funktionen $f, g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben mit $a \in \mathbb{R}$, so schreibt man $f \sim g$ falls $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ gilt (dies bedeutet: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $x_0 \in [a,\infty)$, sodass $|\frac{f(x)}{g(x)} - 1| \leq \epsilon$ für alle $x \geq x_0$ gilt).

Primzahlsatz, umformuliert: *Es ist*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \Big(\sim \frac{x}{\ln x - 1} \sim \mathrm{li}(x)\Big).$$

Dabei handelt es sich bei $\mathrm{li}(x)$ ("logarithmisches Integral") um die Funktion

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}\,t.$$

Beachte: Es ist einfach zu sehen, dass $\frac{x}{\ln x} \sim \frac{x}{\ln x - 1} \sim \mathrm{li}(x)$ gilt.

Hier eine Tabelle, die zeigt, inwieweit die genannten Funktionen für kleine Werte x voneinander abweichen:

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	$\frac{x}{\ln x-1}$	$\mathrm{li}(x)$
1 000	168	145	169	177
10 000	1 229	1 086	1 218	1 245
100 000	9 592	8 686	9 512	9 629
1 000 000	78 498	72 382	78 030	78 627
10 000 000	664 579	620 421	661 459	664 917
100 000 000	5 761 455	5 428 681	5 740 304	5 762 202
1 000 000 000	50 847 534	48 254 942	50 701 542	50 849 234

Das Buch *The Prime Number Theorem* von G.J.O.Jameson (Cambridge Univesity Press 2003) ist diesem Satz gewidmet; im letzten Kapitel findet man einen "elementaren" Beweis (ohne Verwendung von Funktionentheorie). Einen Beweis findet man auch im Abschnitt VI von Scheid: *Zahlentheorie.*