2. Der Primzahlsatz — Zusatz

Seien Funktionen $f, g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gegeben mit $a \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $f \sim g$ falls $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ gilt.

Eigenschaften der Relation $\sim$. Seien $f, g, h\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(1) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, es gilt also: Es ist $f \sim f$. Ist $f \sim g$, so auch $g \sim f$. Und aus $f \sim g,\ g \sim h$ folgt $f \sim h$.

(2) Ist $f \sim cf$ für ein $c \in \mathbb{R}$, so ist $c = 1$.

(3) Ist $f = g + h$ und gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$, so ist $f \sim g$ (denn es ist $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)+h(x)}{g(x)} = 1 + \frac{h(x)}{g(x)}$).

(4) Insbesondere gilt: Ist $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{f(x)} = 0$, so ist $f + c \sim f$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Beweis von $\frac{x}{\ln x} \sim \mathrm{li}(x)$. Wegen der Eigenschaft (4) reicht es zu zeigen: $\frac{x}{\ln x} \sim \int_e^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}\,t$. Die Ableitung der Funktion $\frac{x}{\ln x}$ ist $\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}$, also ist

$$\frac{x}{\ln x} - \frac{e}{\ln e} = \int_e^x \Big(\frac{t}{\ln t}\Big)'\,\mathrm{d}\,t = \int_e^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}\,t - \int_e^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

Wir zerlegen das Integral

$$\int_e^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}\,t = \int_e^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}\,t + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

Beim ersten Summanden verwenden wir: aus $t \ge e$ folgt $\ln t \ge 1$, also ist die zu integrierende Funktion $\frac{1}{(\ln t)^2} \le 1$. Das Integrationsintervall hat Länge $< \sqrt{x}$, also gilt

$$\Big|\int_e^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}\,t\Big| < \sqrt{x}.$$

Beim zweiten Summanden verwenden wir: aus $t \ge \sqrt{x}$ folgt $\frac{1}{\ln t} \le \frac{2}{\ln x}$, also ist die zu integrierende Funktion durch $\frac{4}{(\ln x)^2}$ nach oben beschränkt. Das Integrationsintervall hat Länge $< x$, also ist

$$\Big|\int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}\,t\Big| < x \cdot \frac{4}{(\ln x)^2}.$$

Insgesamt sehen wir:

$$\frac{\ln x}{x}\int_e^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}\,t \le \frac{\ln x}{x}\cdot x^{1/2} + \frac{\ln x}{x}\cdot x \cdot \frac{4}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^{1/2}} + \frac{4}{\ln x},$$

daher ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\int_e^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}\,t = 0$. Die Behauptung folgt nun aus (3).