4. Die Mertens'sche "Vermutung".

Dies betrifft die Möbius'sche μ-Funktion:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei,} \\ (-1)^t & \text{falls } n = p_1 \cdots p_t \text{ mit paarweise verschiedenen Primzahlen } p_i. \end{cases}$$

Betrachtet wird die Funktion $\sum_{n \leq x} \mu(n)$, oder besser die zugehörige Betragsfunktion $M(x) = |\sum_{n \leq x} \mu(n)|$.

Offensichtlich ist $M(x) \leq x$ und Mertens vermutete 1897, dass sogar gelten sollte:

$$M(x) \leq \sqrt{x}$$

er bestätigte dies für $x \leq 10\,000$, mittlerweile weiß man, dass diese Vermutung bis 10^{14} stimmt. Allerdings zeigten Odlyzko und te Riele 1983, dass die Behauptung falsch ist: sie zeigten, dass es Gegenbeispiele geben muss. Pintz zeigte 1987, dass es ein Gegenbeispiel $x \leq \exp(3,21 \cdot 10^{64})$ geben muss, mittlerweile wurde diese obere Schranke auf $x \leq \exp(1.59 \cdot 10^{40})$ heruntergesetzt. Aber genaueres weiß man nicht! Der Beweis von Odlyzko und te Riele zeigt, dass gilt:

$$\boxed{\limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} > 1,06.}$$

Es scheint vermutet zu werden, dass $\limsup_{n\to\infty} \frac{M(n)}{\sqrt{n}} = \infty$ gilt.

Andererseits gilt: Die Riemann'sche Vermutung ist äquivalent zu folgender Vermutung: *Für jedes $\epsilon > 0$ gilt*

$$\boxed{M(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})}$$

(das heißt: für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine Konstante C, sodass $M(x) < Cx^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ für alle $x \gg 0$ gilt), siehe E.C.TITCHMARSH: *The Theory of the Riemann Zeta-Function* (1951).

Und es gibt die folgende viel stärkere Vermutung

$$\boxed{\limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x \ln(\ln(x))}} = \sqrt{\frac{12}{\pi}}.}$$

von J.Good und B. Churchhouse (1968).