5. Die Teilersummenfunktion $\sigma(n)$ und die Riemann'sche Vermutung.

Satz (Lagarias (2002). *Die Riemann'sche Vermutung ist zu folgender Aussage äquivalent:*

$$\boxed{\text{Für } n > 1 \text{ gilt} \quad \sigma(n) < H_n + \exp(H_n) \cdot \ln(H_n)}$$

(dabei sind $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ die harmonischen Zahlen).

Satz (Robin, 1984). *Die Riemann'sche Vermutung ist zu folgender Aussage äquivalent:*

$$\boxed{\text{Für } n > 5040 \text{ gilt} \quad \frac{\sigma(n)}{n \cdot \ln(\ln(n))} < e^{\gamma}}$$

(hier ist $\gamma \approx 0,5772156649$ die Euler-Konstante, also $e^{\gamma} \approx 1,781072418$).

Man nennt n *superabundant,* falls $\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k)}{k}$ für alle $k \leq n$ gilt. Hier ist eine Liste der ersten superabundanten Zahlen, dies ist die Folge A004394 bei Sloane:

$$1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040, \ldots$$

Lemma. *Sei p_i die i-te Primzahl. Ist $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}$ superabundant, so ist $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_t$.*

Beweisidee: Angenommen $e_i < e_{i+1}$. Sei $n' = np_i/p_{i+1}$. Offensichtlich ist $n' < n$. Zu zeigen ist: $\sigma(n')/n' > \sigma(n)/n$.

Eine Teilmenge der superabundanten Zahlen ist von großem Interesse, die der *kolossal abundanten* Zahlen, dies ist die Folge A004490 bei Sloane:

$$2, 6, 12, 60, 120, 360, 2520, 5040, 55440, 720720, 1441440, 4324320, 21621600, 367567200,$$
$$6983776800, 160626866400, 321253732800, 9316358251200, 288807105787200, \cdots$$

sie sind dadurch definiert, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass gilt:

$$\frac{\sigma(n)}{n^{1+\epsilon}} \geq \frac{\sigma(k)}{k^{1+\epsilon}} \quad \text{für alle } k > 1.$$

Schaut man sich die jeweiligen Quotienten benachbarter kolossal abundanter Zahlen an, so erhält man die Folge A073751 bei Sloane:

$$2, 3, 2, 5, 2, 3, 7, 2, 11, 13, 2, 3, 5, 17, 19, 23, 2, 29, 31, 7, 3, 37, 41, 43, 2, 47, 53, 59, 5, 61, 67,$$
$$71, 73, 11, 79, 2, 83, 3, 89, 97, 13, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 2, 149, 151, \cdots$$

Dies scheint eine ganz wichtige Folge zu sein: alle Zahlen scheinen Primzahlen zu sein, alle Primzahlen scheinen aufzutreten, vor dem ersten Auftritt einer Primzahl p stehen nur Primzahlen $q < p$, ... : All dies sind nur Vermutungen.