1. Sei $y = \dfrac{2}{3}$. Gesucht sind rationale Zahlen x, z, sodass $x < y$ und auch $y < z$ Farey-Nachbarn sind, und $|x - y| < \frac{1}{100}$ und $|z - y| < \frac{1}{100}$ gilt. (Nur Antwort).

Let $y = \dfrac{2}{3}$*. Provide rational numbers* x, z *such that* $x < y$ *and* $y < z$ *are Farey-neighbors, and such that* $|x - y| < \frac{1}{100}$ *and* $|z - y| < \frac{1}{100}$. (Only answer.)

2. Gesucht ist die kleinste Primzahl q mit $3 < q$, sodass 3 quadratischer Rest module q, aber q nicht quadratischer Rest modulo 3 ist. (Antwort, mit Begründung.)

Determine the smallest prime number q *with* $3 < q$*, such that* 3 *is* q *quadratic residue modulo* q*, whereas* q *is not a quadratic residue modulo* 3*. (Answer and proof.)*

3. Gesucht ist eine ganze Gauß'sche Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{N}$ und $N(z) = 493$. (Hinweis: $493 = 17 \cdot 29$.) (Nur Antwort)

Provide a Gaussian integer $z = x+iy$ *with* $x, y \in \mathbb{N}$ *and* $N(z) = 493$. *(Hint:* $493 = 17 \cdot 29$*.) (Only answer)*

4. Gesucht sind natürliche Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ mit /*provide natural numbers* $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ *such that*

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 + x_{10}^2.$$

(Nur Antwort /*Only answer*)

5. Zeige direkt (also ohne Verwendung des allgemeinen Dirichlet-Satzes): Es gibt unendlich viele Primzahlen q mit $q \equiv 3 \mod 4$. (Beweis.)

Show that there are infinitely many primes q *satisfying* $q \equiv 3 \mod 4$ *(without using the general Dirichlet theorem!)*

6. Es gibt genau 4 Restklassen-Charaktere modulo 8, nämlich den trivialen Charakter χ_0 und drei weitere χ', χ'', χ''' mit einer Wertetabelle der folgenden Form:

$\chi \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
χ_0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	$\cdots$
χ'	1	0	a_1	0	a_2	0	a_3	0	1	0	$\cdots$
χ''	1	0	b_1	0	b_2	0	b_3	0	1	0	$\cdots$
χ'''	1	0	c_1	0	c_2	0	c_3	0	1	0	$\cdots$

Gesucht sind die fehlenden Werte (nur Antwort).

The table above shows values of the residue characters modulo 8*. Some values are missing. Provide the missing values (only answer).*

7. Wieviele Primitivwurzeln modulo 101 gibt es? (Nur Antwort.)

Provide the number of primitive roots modulo 101*. (Only answer.)*

8. Zeige: Genau dann hat n eine ungerade Anzahl von Teilern, wenn n Quadratzahl ist. (Beweis.)

Show: The number of divisors of n is odd if and only if n is a square. (Proof.)

Beweis / Proof:

9. Sei p eine Primzahl. Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ folgendermaßen definiert: Es sei $f(n) = 1$ falls p ein Teiler von n ist, und $f(n) = 0$ sonst. Ist diese Funktion multiplikativ? (Antwort mit Begründung.)

Let p be a prime number. Define $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ as follows: $f(n) = 1$ if p divides n, and $f(n) = 0$ otherwise. Is f multiplicative? (Answer with proof.)

10. Bestimme alle Zahlen n mit $\phi(n) = 4$. (Nur Antwort.)

What are the numbers n with $\phi(n) = 4$? (Only answer).

11. RSA: Alice verschlüsselt eine Nachricht mit dem öffentlichen Schlüssel $[143, 23]$. Der verschlüsselte Text sei 2. Bobs privater Schlüssel sei $[143, 47]$. Man bestimme den Klartext. (Was ist zu berechnen? Welches Ergebnis erhält man?)

Alice encodes a message with the public key $[143, 23]$, the encoded message is 2*. Bob's private key is $[143, 47]$. Determine the original message. (What has to be calculated? What is the result?)*

12. Man berechne $\mu(\frac{n!}{5!})$ für alle $n \geq 5$. (Nur Antwort.)

Determine $\mu(\frac{n!}{5!})$ for all $n \geq 5$. (Only answer.)

13. Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$(*) \qquad n \leq 2^{\pi(n)}\sqrt{n}.$$

dabei ist $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leq n$. (Beweis)

Show $(*)$ for any natural number n, where $\pi(n)$ is the number of primes $p \leq n$. (Proof)

14. Sei $n \in \mathbb{N}$, setze $q = 2n + 1$. Zeige: Ist q eine Primzahl und gilt $\left(\frac{2}{q}\right) = 1$, so ist q ein Teiler von $2^n - 1$. (Beweis.)

Let $n \in \mathbb{N}$, let $q = 2n + 1$. Show: If q is a prime and $\left(\frac{2}{q}\right) = 1$, then q divides $2^n - 1$. (Proof.)

15. Man gebe die Ordnung der Restklassen $\overline{a}$ in der multiplikativen Gruppe $U(\mathbb{Z}/11, \cdot)$ an für $1 \leq a \leq 10$ (Nur Antworten):

Determine the order of the residue classes $\overline{a}$ in the multiplicative group $U(\mathbb{Z}/11, \cdot)$, for $1 \leq a \leq 10$ (Only answers):

16. Wieviele Endnullen hat $110!$ (in der Darstellung im Zehner-System)? (Nur Antwort.)

Determine the number of zero digits at the end of $110!$ *(when written in the decimal system). (Only answer.)*

17. Beweise: Es gibt unendlich viele Primzahlen, deren erste Ziffer (in der Dezimalentwicklung) eine 1 ist. (Beweis, alle Sätze der Vorlesung dürfen verwendet werden.)

Show that there are infinitely many prime numbers with first digit (written in the decimal system) being equal to 1. *(Proof, all results presented in the lecture can be quoted).*

18. Welche der folgenden Primzahlen p sind Teiler von $\binom{82}{41}$? Man schreibe J für JA und N für NEIN. (Nur Tabelle ausfüllen).

Which of the following prime numbers p *divide* $\binom{82}{41}$*? Write* J *in case* p *is a divisor, and* N *otherwise.*

p	11	29	31	59	61	79
J/N						