4. Dirichlet's Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen.

Satz (Dirichlet 1837). *Seien a, k natürliche Zahlen. Sind die Zahlen a, k teilerfremd, so gibt es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv a \mod k$.*

Also: Sind die Zahlen a, k teilerfremd, so enthält die Folge

$$a,\ a+k,\ a+2k,\ a+3k,\ \dots$$

(man nennt dies eine *arithmetische Progression*) unendlich viele Primzahlen.

Die Umkehrung gilt natürlich auch (sogar in verschärfter Form): *Gibt es wenigstens zwei Primzahlen $p_1 \neq p_2$ mit $p_i \equiv a \mod k$ für $i = 1, 2$, so sind a, k teilerfremd* (denn $p_i \equiv a \mod k$ besagt, dass es $x_i \in \mathbb{N}$ gibt mit $p_i = x_i k + a$; ist d ein gemeinsamer Teiler von a und k, so ist d auch ein Teiler von $x_i k + a = p_i$, also ein gemeinsamer Teiler von p_1, p_2; der einzige gemeinsame Teiler von zwei verschiedenen Primzahlen ist 1). Es gilt also: *Sind a, k natürliche Zahlen, so ist die Anzahl der Primzahlen p mit $p \equiv a \mod k$ entweder 0 oder 1 oder ∞.*

Im Fall $a = k = 1$ ist dies Euklid's Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Für $k = 2$ ist dies auch nicht aufregend: es gibt unendlich viele ungerade Primzahlen. Aber für alle $k \geq 3$ ist dies interessant. Für $k = 10$ besagt der Satz: Für jede der Ziffern $1, 3, 7, 9$ gibt es unendlich viele Primzahlen p mit dieser Endziffer in der Dezimalentwicklung von p.

Wir werden zeigen, dass die Reihe $\sum_{p \equiv a} \frac{\ln(p)}{p}$ divergiert. Wir werden sogar eine Art Gleichverteilung der Primzahlen auf die zu k teilerfremden Restklassen beweisen.

4.0. Erinnerung: Restklassen-Charaktere.

4.0.1. Definition. Sei $k \in \mathbb{N}$. Ein Restklassen-Charakter modulo k ist eine zahlentheoretische Funktion $\chi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit folgenden drei Eigenschaften:
(i) Genau dann ist $\chi(n) = 0$, wenn $(n, k) > 1$ gilt.
(ii) Ist $n \equiv n' \mod k$, so ist $\chi(n) = \chi(n')$.
(iii) Die Funktion χ ist stark multiplikativ.

4.0.2. *Ist χ ein Restklassen-Charakter modulo k, so ist jeder von Null verschiedene Wert $\chi(n)$ eine $\phi(k)$-te Einheitswurzel.*

4.0.3. *Es gibt genau $\phi(k)$ Restklassen-Charaktere modulo k.*

4.0.4. Für jedes k gibt es den Restklassen-Charakter $\chi_0^{(k)}$ mit

$$\chi_0^{(k)}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad (n,k) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

man nennt ihn den *Hauptcharakter*, die übrigen Restklassen-Charaktere nehmen auch Werte ungleich Null und Eins an. Ein Restklassen-Charakter, der nur reelle Werte (also $0, 1, -1$) annimmt, heißt *reeller* Charakter.

4.0.5. Orthogonalitätsrelation I. Sei χ ein Restklassen-Charakter modulo k. Dann gilt:

$$\sum_{l=1}^{k} \chi(l) = \begin{cases} \phi(k) & \text{falls} \quad \chi = \chi_0 \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad \chi \neq \chi_0, \end{cases}$$

statt über die Zahlen $1 \leq l \leq k$ zu summieren, kann man über ein beliebiges Repräsentatensystem modulo k summieren.

4.0.6. Orthogonalitätsrelation II. Seien $l, l' \in \mathbb{N}$ mit $(k, l) = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{\chi} \chi(l) = \begin{cases} \phi(k) & \text{falls} \quad l \equiv 1 \mod k, \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad l \not\equiv 1 \mod k, \end{cases}$$

dabei wird über alle Restklassen-Charaktere modulo k summiert.

Wir verwenden eine allgemeinere Version: Für $l, l' \in \mathbb{N}$ mit $(k, l) = 1$ gilt:

$$\sum_{\chi} \frac{\chi(l')}{\chi(l)} = \begin{cases} \phi(k) & \text{falls} \quad l' \equiv l \mod k, \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad l' \not\equiv 1 \mod k, \end{cases}$$

(wieder wird über alle Restklassen-Charaktere modulo k summiert).

4.1. Trennung der Restklassen.

Von nun an sei $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt. So weit nichts anderes notiert ist, sind alle Kongruenzen, Restklassenbildungen und Restklassen-Charaktere modulo k.

Wie üblich nennen wir eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ *beschränkt* (hier ist M eine Menge, eben der Definitionsbereich von f, etwa $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{N}$) *beschränkt,* wenn es eine reelle Zahl b gibt mit $|f(x)| \leq b$ für alle $x \in M$. Sind $f, g\colon M \to \mathbb{C}$ Funktionen, so schreibt man $f(x) = g(x) + O(1)$, falls $f - g$ beschränkt ist ("Landau-Notation").

> Hier ist eine eindringliche **Warnung** erforderlich: Die Landau-Notation ist ein Missbrauch des Gleichheitszeichens: links steht eine Funktion, rechts steht sozusagen eine ganze Klasse von Funktionen ... .
>
> Noch eine allgemeine Bemerkung. Wenn wir mit einer Reihe der Form $\sum_t a_t$ arbeiten, müssen wir jeweils Partialsummen betrachten. Sind die Zahlen a_t nicht-negative reelle Zahlen, so folgt aus der Beschränktheit der Partialsummen die Konvergenz der Reihe. Oft werden aber die Zahlen a_t beliebige komplexe Zahlen sein. Dann folgt aus der Beschränktheit der Partialsummen keineswegs die Konvergenz. Manchmal würde es viel Mühe bereiten, die Konvergenz zu zeigen, während man leicht die Beschränktheit sieht. Wenn die Beschränktheit für die jeweilige Argumentation ausreicht, werden wir auch nur dies zeigen.

Wir folgern in diesem Abschnitt die Divergenz von $\sum_p \frac{\ln(p)}{p}$ aus einer Voraussetzung $(*)$. Die weiteren Abschnitte dienen dann dazu, diese Voraussetzung zu beweisen.

Satz. *Seien $a, k \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Es gelte:*

(∗) *Ist χ ein vom Hauptcharakter verschiedener Restklassen-Charakter, so ist die Funktion*

$$\sum_{p \le x} \frac{\chi(p) \cdot \ln(p)}{p}$$

für $x \in \mathbb{R}$ beschränkt.

Dann ist die Reihe

$$\sum_{p \equiv a} \frac{\ln(p)}{p}$$

divergent.

Beweis. Sei N die Menge der Primzahlen $p \le x$, und für $0 \le c \le k-1$ sei $N(c)$ die Menge der $p \in N$ mit $p \equiv c \mod k$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi} \frac{1}{\chi(a)} \sum_{p \in N} \frac{\chi(p)\ln(p)}{p} &= \sum_{p \in N} \sum_{\chi} \frac{\chi(p)}{\chi(a)} \frac{\ln(p)}{p} \\
&= \sum_{c=0}^{k-1} \sum_{p \in N(c)} \sum_{\chi} \frac{\chi(c)}{\chi(a)} \frac{\ln(p)}{p} \\
&= \sum_{c=0}^{k-1} \left(\sum_{\chi} \frac{\chi(c)}{\chi(a)} \right) \sum_{p \in N(c)} \frac{\ln(p)}{p} \\
&= \phi(k) \sum_{p \in N(a)} \frac{\ln(p)}{p}
\end{aligned}$$

Als erstes wurde die Reihenfolge des Summierens geändert, dann wurde N in die Restklassen modulo k zerlegt, dabei gilt dann $\chi(p) = \chi(c)$ für $p \in N(c)$. Drittens wird für jede Restklasse der konstante Faktor $\sum_\chi \frac{\chi(c)}{\chi(a)}$ vorgezogen; dieser Faktor ist nur für $a \equiv c$ von Null verschieden und dann gleich $\phi(k)$, dies ist die zweite Orthogonalitätsrelation.

Es folgt also:

$$\begin{aligned}
\sum_{p \in N(a)} \frac{\ln(p)}{p} &= \frac{1}{\phi(k)} \sum_{\chi} \frac{1}{\chi(a)} \sum_{p \in N} \frac{\chi(p)\ln(p)}{p} \\
&= \frac{1}{\phi(k)} \sum_{p \in N} \frac{\chi_0(p)\ln(p)}{p} + \frac{1}{\phi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\chi(a)} \sum_{p \in N} \frac{\chi(p)\ln(p)}{p} \\
&= \frac{1}{\phi(k)} \sum_{p \in N} \frac{\ln(p)}{p} + O(1),
\end{aligned}$$

dabei haben wir verwendet, dass einerseits $\chi_0(a) = 1$ gilt, andererseits, dass es nur endlich viele Primzahlen p mit $\chi_0(p) \neq 1$ gibt, und natürlich die Voraussetzung, dass alle Summanden mit $\chi \neq \chi_0$ beschränkt sind.

Wir wissen, dass die Reihe $\sum_p \frac{\ln(p)}{p}$ divergiert. Dies besagt, dass die Funktion $\sum_{p\in N} \frac{\ln(p)}{p}$ (in Abhängigkeit von x) unbeschränkt ist. Also sehen wir, dass $\sum_{p\in N(a)} \frac{\ln(p)}{p}$ (in Abhängigkeit von x) unbeschränkt ist. Aber dies besagt gerade, dass die Reihe $\sum_{p\equiv a} \frac{\ln(p)}{p}$ divergent ist.

4.2. Verwendung der Mangoldt-Funktion.

Wir beginnen mit einem ganz allgemeinen (und für viele Überlegungen wichtigen) Hilfssatz:

Lemma 4.2.1. *Die Reihe*

$$\sum_p \sum_{m\ge 2} \frac{\ln p}{p^m}$$

ist konvergent.

Beweis: Es ist $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{p^t} = \frac{p}{p-1}$, also $\sum_{t=2}^{\infty} \frac{1}{p^t} = \frac{1}{p^2}\frac{p}{p-1} = \frac{1}{p(p-1)}$. Also

$$\begin{aligned} \sum_p \sum_{m\ge 2} \frac{\ln p}{p^m} &= \sum_p \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \\ &< \sum_{n\ge 2} \frac{\ln(n)}{n(n-1)} \\ &\le \sum_{n\ge 2} \frac{2\ln(n)}{n^2} \end{aligned}$$

(die letzte Abschätzung folgt aus $2n(n-1) \ge n^2$ für $n \ge 2$). Die letzte Reihe ist bekanntlich konvergent (denn $\ln(n) \le n^{1/2}$, also wird die Reihe $\sum_n \frac{\ln(n)}{n^2}$ durch die Reihe $\sum_n n^{1/2-2} = \sum_n n^{-3/2} = \zeta(\frac{3}{2})$ majorisiert).

Die *Mangoldt-Funktion* Λ ist folgendermaßen definiert:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{falls} \quad n \quad \text{eine echte Potenz von } p \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.2.2. Korollar. *Konvergiert* $\sum_n \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}$, *so ist die Funktion* $\sum_{p\le x} \frac{\chi(p)\cdot\ln(p)}{p}$ *beschränkt.*

Beweis: Die Funktionen $\sum_{p\le x} \frac{\chi(p)\cdot\ln(p)}{p}$ und $\sum_{n\le x} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}$ unterscheiden sich nur durch Terme der Form $\frac{\ln(p)}{p^m}$ mit Primzahl p und $m \ge 2$. Es ist also

$$\sum_{p\le x} \frac{\chi(p)\cdot\ln(p)}{p} = \sum_{n\le x} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n} + O(1).$$

Wenn also $\sum_n \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}$ konvergiert, so ist die Funktion $\sum_{n\le x} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}$ beschränkt, also ist auch die Funktion $\sum_{p\le x} \frac{\chi(p)\cdot\ln(p)}{p}$ beschränkt.

4.3. L-Reihen: Konvergenz

Sei k eine natürliche Zahl und χ ein Restklassen-Charakter modulo k.

4.3.1. Definition. Man nennt

$$L(s,\chi) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$$

eine (Dirichlet'sche) *L-Reihe.*

Für $k = 1$ gibt es nur den Hauptcharakter $\chi_0^{(1)}$, und $L(s,\chi_0^{(1)}) = \zeta(s)$ ist nicht anderes als die Riemann'sche ζ-Funktion.

Ein Beispiel für $k = 4$. Es gibt genau einen nicht-trivialen Restklassencharakter χ modulo 4, nämlich

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \quad n \equiv 1 \mod 4, \\ -1 & \text{für} \quad n \equiv 3 \mod 4, \\ 0 & \quad n \equiv 0 \mod 2 \end{cases}$$

Es ist

$$L(1,\chi) = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - + \ldots,$$

dies ist die sogenannte Leibniz-Reihe mit Wert $L(1,\chi) = \frac{\pi}{4}$; vor Leibniz (1682) war diese Reihe schon im 14.Jahrhundert dem indischen Mathematiker Madhava bekannt; der schottische Mathematiker Gregory notierte die Formel 1671.

4.3.2. *Alle L-Reihen sind für $s > 1$ absolut konvergent.*

Beweis: Es ist $|\frac{\chi(n)}{n^s}|$ entweder gleich $\frac{1}{n^s}$ oder aber Null, also ist $\frac{1}{n^s}$ eine Majorante.

Warnung. *Keine L-Reihe ist für $s = 1$ absolut konvergent.*

Beweis: Sei χ ist ein Restklassen-Charakter modulo k. Die folgenden Kongruenzen sind alle modulo k. Angenommen, $L(1,\chi)$ ist absolut konvergent. Dann ist die Teilreihe $\sum_{n\equiv 1} \frac{1}{n}$ konvergent. Aber es gilt

$$\sum_{n\equiv 1} \frac{1}{n} > \sum_{n\equiv 2} \frac{1}{n} > \cdots > \sum_{n\equiv k} \frac{1}{n},$$

demnach wären alle diese Reihen und dann auch ihre Summe konvergent. Die Summe ist aber die harmonische Reihe.

Folgerung. *Ist χ ein Hauptcharakter, so ist $L(1,\chi)$ divergent.*

Beweis: Hier handelt es sich ja um eine Reihe mit nicht-negativen Gliedern.