

4.3.3. Satz. Ist χ kein Hauptcharakter, so sind die Reihen

$$\sum_n \frac{\chi(n)}{n^s} \quad \text{und} \quad \sum_n \frac{\chi(n) \ln(n)}{n^s}$$

für $s \geq 1$ gleichmäßig konvergent.

Beweis: Wir brauchen zwei Lemmata.

Lemma 1. Seien $u \leq v$ natürliche Zahlen, sei $\chi \neq \chi_0$ ein Restklassen-Charakter modulo k . Dann ist $|\sum_{n=u}^v \chi(n)| \leq k$. (Die Schranke könnte zu $\frac{1}{2}\phi(k)$ verbessert werden.)

Beweis: Ist $v < u+k$, so handelt es sich um höchstens k Zahlen $\chi(n)$, und $|\chi(n)| \leq 1$ für alle n . Ist $v \geq u+k$, so bilden die Elemente $\overline{u}, \dots, \overline{u+k-1}$ in $\mathbb{Z}/n$ eine Aufzählung aller Elemente aus $\mathbb{Z}/n$. Die erste Orthogonalitätsrelation besagt nun $\sum_{n=u}^{u+k-1} \chi(n) = 0$. Also ist

$$\sum_{n=u}^v \chi(n) = \sum_{n=u+k}^v \chi(n).$$

Nach Induktion ist die rechte Seite betragsmäßig durch k beschränkt.

Lemma 2. Seien $r_u \geq r_{u+1} \geq \dots$ nicht-negative reelle Zahlen, seien $\gamma_u, \gamma_{u+1}, \dots$ komplexe Zahlen. Für alle $v \geq u$ und $G(v) = \sum_{n=u}^v \gamma_n$ gelte $|G(v)| \leq b$ für eine reelle Zahl b . Dann gilt für alle $v \geq u$

$$\left| \sum_{n=u}^v r_n \gamma_n \right| \leq r_u b.$$

Beweis: Beachte: Nach Definition ist $G(u-1) = 0$ und $G(n) - G(n-1) = \gamma_n$. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=u}^v r_n \gamma_n &= \sum_{n=u}^v r_n (-G(n-1) + G(n)) \\ &= r_u G(u) - r_{u+1} G(u) + r_{u+1} G(u+1) - \dots - r_v G(v-1) + r_v G(v) \\ &= \sum_{n=u}^{v-1} G(n) (r_n - r_{n+1}) + r_v G(v) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=u}^v r_n \gamma_n \right| &\leq \sum_{n=u}^{v-1} |G(n)| (r_n - r_{n+1}) + |G(v)| r_v \\ &\leq b \left(\sum_{n=u}^{v-1} (r_n - r_{n+1}) + r_v \right) \\ &= b r_u, \end{aligned}$$

hier haben wir neben der Dreiecksungleichung auch die Tatsache verwendet, dass sowohl die Differenzen $r_n - r_{n+1}$ als auch die Zahl r_v nicht-negativ sind.

Die im Beweis verwandte Umformung der Summe nennt man **Abel'sche Summation** oder auch Abel'sche partielle Summation; sie wurde von Niels Henrik Abel benutzt, um Konvergenzfragen von Potenzreihen zu lösen. Hier werden wir die Konvergenz von Dirichlet-Reihen betrachten.

Beweis des Satzes: Für die Reihe $\sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$ nimm $r_n = \frac{1}{n^s}$ und $\gamma_n = \chi(n)$. Die Bedingung an $G(v)$ ist wegen Lemma 1 erfüllt. Also ist

$$\left| \sum_{n=u}^v \frac{\chi(n)}{n^s} \right| \leq \frac{1}{u^s} k \leq \frac{1}{u} k$$

für alle $s \geq 1$. Wählen wir also u groß, so ist die Restsumme $\sum_{n=u}^v \frac{\chi(n)}{n^s}$ betragsmäßig beliebig klein.

Für die Reihe $\sum_n \frac{\chi(n) \ln(n)}{n^s}$ nimmt man entsprechend $r_n = \frac{\ln(n)}{n^s}$ und $\gamma_n = \chi(n)$. Zusätzlich müssen wir $u \geq 3$ wählen: Die Funktion $\frac{\ln(x)}{x^s}$ ist für $x \geq e$ monoton fallend, denn ihre Ableitung ist $\frac{-s \ln(x) + 1}{x^{s+1}}$ und für $x \geq e$ ist $\ln(x) \geq 1$, also $-s \ln(x) + 1 \leq -s + 1 \leq 0$ (wir setzen ja $s \geq 1$ voraus). Dies zeigt, dass die Folge r_n mit $n \geq 3$ monoton fällt: $r_3 \geq r_4 \geq \dots$. Die Summen $G(v)$ sind die gleichen wie im ersten Fall, also erhalten wir diesmal

$$\left| \sum_{n=u}^v \frac{\chi(n) \ln(n)}{n^s} \right| \leq \frac{\ln(u)}{u^s} k \leq \frac{\ln(u)}{u} k$$

für alle $s \geq 1$ (und $u \geq 3$). Da auch die Folge $(\frac{\ln(u)}{u})_u$ eine Nullfolge ist, sehen wir wieder, dass für u groß die Restsumme $\sum_{n=u}^v \frac{\chi(n) \ln(n)}{n^s}$ betragsmäßig beliebig klein wird (unabhängig von v und s).

Die erste der beiden Reihen ist nach Definition die Dirichlet'sche L -Reihe

$$L(s, \chi) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s},$$

und die zweite? Sie ist gerade das Negative der Ableitung von $L(s, \chi)$:

4.3.4. Folgerung. Sei χ kein Hauptcharakter. Die auf dem Intervall $[1, \infty[$ definierte Funktion $L(s, \chi)$ ist differenzierbar und es gilt

$$L'(s, \chi) = - \sum_n \frac{\chi(n) \ln(n)}{n^s}.$$

Beweis. Beachte dass gilt: $\frac{d}{ds} n^{-s} = -\ln(n) n^{-s}$. Betrachten wir also die Folge der Partialsummen $f_m(s) = \sum_{n=1}^m \frac{\chi(n)}{n^s}$ von $L(s, \chi)$, so sind dies differenzierbare Funktionen und die Folge der Ableitungen $f'_m(s) = - \sum_{n=1}^m \frac{\chi(n) \ln(n)}{n^s}$ konvergiert gleichmäßig auf $[1, \infty[$ gegen die Funktion $- \sum_n \frac{\chi(n) \ln(n)}{n^s}$. Daraus folgt die Behauptung.

4.4. L -Reihen: Euler-Produkte.

Sei χ ein beliebiger Restklassencharakter und es sei $s > 1$.

4.4.1. Satz. Für jeden Restklassencharakter χ und $s > 1$ gilt

$$L(s, \chi) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

Wir betrachten als erstes die geometrischen Reihen

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\chi(p^t)}{(p^t)^s} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{\chi(p)}{p^s} \right)^t = \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}},$$

dabei verwenden wir für die erste Gleichheit die starke Multiplikativität von χ . Jeden Term der L -Reihe $L(s, \chi)$ können wir als (eindeutig bestimmtes) Produkt schreiben: ist etwa $n = p_1^{t_1} \cdots p_m^{t_m}$, so ist

$$\frac{\chi(n)}{n^s} = \frac{\chi(p_1^{t_1} \cdots p_m^{t_m})}{(p_1^{t_1} \cdots p_m^{t_m})^s} = \frac{\chi(p_1^{t_1})}{(p_1^{t_1})^s} \cdots \frac{\chi(p_m^{t_m})}{(p_m^{t_m})^s}$$

Bezeichnen wir mit $P(m)$ die Menge der ersten m Primzahlen $p_1, \dots, p_m$, und mit $N(m)$ die Menge der natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren zu $P(m)$ gehören, so erhalten wir

$$\prod_{p \in P(m)} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}} = \sum_{p \in N(m)} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Für $s > 1$ können wir den Grenzwert $m \rightarrow \infty$ bilden, rechts erhalten wir die absolut konvergente Reihe $L(s, \chi)$, links entsprechend ein absolut konvergentes Produkt.

Dabei heißt ein Produkt $\prod_k (1 + a_k)$ mit komplexen Zahlen a_k mit $|a_k| < 1$ *absolut konvergent*, wenn das Produkt $\prod_k (1 + |a_k|)$ konvergiert, und dies ist genau dann der Fall, wenn die Reihe $\sum_k |a_k|$ konvergiert.

4.4.2. Folgerung. Für jeden Restklassencharakter χ und $s > 1$ ist $L(s, \chi) \neq 0$.

Beweis: Sind a_k komplexe Zahlen mit $|a_k| < 1$ und ist das Produkt $\prod_k (1 + a_k)$ absolut konvergent, so gilt immer $\prod_k (1 + a_k) \neq 0$.

4.4. Dirichlet-Reihen.

Allgemeiner kann man jeder zahlentheoretischen Funktion α eine sogenannte *Dirichlet-Reihe*

$$f_\alpha(s) = \sum_n \frac{\alpha(n)}{n^s}$$

zuordnen. Um mit Dirichlet-Reihen problemlos zu arbeiten, betrachtet man oft nur den Fall von absolut konvergenten Reihen (denn nur dann darf man umordnen; bekanntlich bereitet auch die Produktbildung konvergenter, aber nicht absolut konvergenter Reihen Probleme).

Seien α, β zahlentheoretische Funktionen.

Summe von Dirichlet-Reihen. Man $\alpha + \beta$ durch $(\alpha + \beta)(n) = \alpha(n) + \beta(n)$. Offensichtlich gilt: *Sind die Reihen $f_\alpha(s), f_\beta(s)$ konvergent, so ist auch $f_{\alpha+\beta}(s)$ konvergent und*

$$f_{\alpha+\beta}(s) = f_\alpha(s) + f_\beta(s).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f_\alpha(s) + f_\beta(s) &= \sum_n \frac{\alpha(n)}{n^s} + \sum_n \frac{\beta(n)}{n^s} \\ &= \sum_n \frac{\alpha(n) + \beta(n)}{n^s} \\ &= \sum_n \frac{(\alpha + \beta)(n)}{n^s} \\ &= f_{\alpha+\beta}(s) \end{aligned}$$

Produkt von Dirichlet-Reihen. Es sei daran erinnert, dass die Faltung $\alpha * \beta$ durch $(\alpha * \beta)(n) = \sum_{d|n} \alpha(d) + \beta(\frac{n}{d})$ definiert ist. Es gilt nun: *Sind die Reihen $f_\alpha(s), f_\beta(s)$ absolut konvergent, so ist auch $f_{\alpha*\beta}(s)$ absolut konvergent und*

$$f_{\alpha*\beta}(s) = f_\alpha(s)f_\beta(s).$$

Beweis: Hier wird verwendet, dass man das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen durch distributives Ausrechnen bestimmen kann (und so wieder eine absolut konvergente Reihe erhält):

$$\begin{aligned} f_\alpha(s)f_\beta(s) &= \left(\sum_d \frac{\alpha(d)}{d^s} \right) \left(\sum_e \frac{\beta(e)}{e^s} \right) = \sum_{d,e} \frac{\alpha(d)}{d^s} \frac{\beta(e)}{e^s} \\ &= \sum_n \sum_{de=n} \frac{\alpha(d)\beta(e)}{d^s e^s} \\ &= \sum_n \frac{1}{n^s} \sum_{de=n} \alpha(d)\beta(e) \\ &= \sum_n \frac{(\alpha * \beta)(n)}{n^s} = f_{\alpha*\beta}(s). \end{aligned}$$

Einselement. Die zahlentheoretische Funktion I mit $I(1) = 1$ und $I(n) = 0$ für $n > 1$ liefert offensichtlich als f_I die konstante Funktion 1.

Bezüglich der Faltung inverse Funktionen. Sind α, β zahlentheoretische Funktionen mit $\alpha * \beta = I$, und sind die beiden Reihen $f_\alpha(s), f_\beta(s)$ absolut konvergent, so gilt $f_\alpha(s) \cdot f_\beta(s) = 1$, also $f_\beta(s) = \frac{1}{f_\alpha(s)}$.

4.5. Vergleichssatz.

Ziel ist, folgenden Satz zu beweisen:

4.5.1. Satz. Für jeden Charakter χ und $s > 1$ gilt

$$\sum_n \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}.$$

Zum Beweis brauchen wir einige allgemeine Formeln für zahlentheoretische Funktionen! Die hätten schon im Teil 3 bewiesen werden sollen, dort hätte man aber nicht gewusst, warum sie von Interesse sind.

Sind α, β zahlentheoretische Funktionen, so bezeichnet man mit $\alpha\beta$ die Funktion mit $(\alpha\beta)(n) = \alpha(n)\beta(n)$, also das komponentenweise Produkt. Wir betrachten also auf Φ zwei verschiedene Multiplikationen: neben der Faltung $*$ auch die komponentenweise Multiplikation!

(1) Sind α, β multiplikativ, so ist auch $\alpha\beta$ multiplikativ.

Beweis: Seien n_1, n_2 teilerfremde natürliche Zahlen.

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)(n_1n_2) &= \alpha(n_1n_2)\beta(n_1n_2) = \alpha(n_1)\alpha(n_2)\beta(n_1)\beta(n_2) \\ &= \alpha(n_1)\beta(n_1)\alpha(n_2)\beta(n_2) = (\alpha\beta)(n_1)(\alpha\beta)(n_2). \end{aligned}$$

Erinnerung: Mit μ haben wir die Möbius-Funktion bezeichnet, also die bezüglich der Faltung zu I inverse Funktion, dabei ist $U(n) = 1$ für alle n .

(2) Ist α stark multiplikativ, so ist $\alpha\mu$ die zu α (bezüglich der Faltung) inverse zahlentheoretische Funktion.

Beweis: Sei α stark multiplikativ. Wegen (1) ist $\alpha\mu$ zumindest multiplikativ. Also ist nach Satz 3.2.1 auch $\alpha * \alpha\mu$ multiplikativ. Um zu zeigen $\alpha * \alpha\mu = I$, genügt es, die linke Funktion auf Primzahlpotenzen p^t mit $t \geq 1$ auszuwerten — man muss jeweils Null erhalten. Dies ist in der Tat der Fall:

$$\begin{aligned} (\alpha * \alpha\mu)(p^t) &= \sum_{0 \leq s \leq t} \alpha(p^{t-s})(\alpha\mu)(p^s) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq t} \alpha(p^{t-s})\alpha(p^t)\mu(p^s) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq t} \alpha(p^{t-s})\alpha(p^t)\mu(p^s) \\ &= \alpha(p^t)(\mu(p^0) + \mu(p^1)) \\ &= \alpha(p^t)(1 - 1) = 0. \end{aligned}$$