(3) *Ist α stark multiplikativ, so ist $\alpha\beta * \alpha\gamma = \alpha(\beta * \gamma)$.*

Beweis:

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta * \gamma)(n) &= \alpha(n)\sum_{d|n}\beta(d)\gamma(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n}\alpha(n)\beta(d)\gamma(\frac{n}{d}) \\
&= \sum_{d|n}\alpha(d)\alpha(\frac{n}{d})\beta(d)\gamma(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n}\alpha(d)\beta(d)\alpha(\frac{n}{d})\gamma(\frac{n}{d}) \\
&= \sum_{d|n}(\alpha\beta)(d)(\alpha\beta)(\frac{n}{d}) = ((\alpha\beta) * (\alpha\gamma))(n)
\end{aligned}$$

Wir definieren $\lambda \in \Phi$ durch $\lambda(n) = \ln(n)$. Dann gilt die Ableitungsformel $\chi' = -\chi\lambda$ (denn die Ableitung der Funktion n^{-s} nach s ist $-\ln(n)n^{-s}$).

(4) *Es ist $\Lambda = \lambda * \mu$.*

Beweis: Wir zeigen $\Lambda * U = \lambda$, die Möbius-Inversion liefert die Behauptung. Sei $n = p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}$.

$$\begin{aligned}
(\Lambda * U)(n) = \sum_{d|n}\Lambda(d) &= \sum_{p^e|n,\ e\geq 1}\ln(p) \\
&= \sum_i e_i\ln(p_i) \\
&= \ln(p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}) = \ln(n),
\end{aligned}$$

denn die einzigen Teiler d von n mit $\Lambda(d) \neq 0$ sind die Primzahlpotenzen p^e, die n teilen; für jede Primzahl p_i mit $p_i|n$ gibt es genau e_i Teiler von n, die zu berücksichtigen sind, nämlich $p_i, p_i^2, \ldots, p_i^{e_i}$. Für jeden dieser Teiler d gilt $\Lambda(d) = \ln(p)$. Dies zeigt $\sum_{d|n}\Lambda(d) = \sum_i e_i\ln(p_i)$.

4.5.2. Beweis von 4.5.1.

$$-\chi' * \chi^{-1} = \chi\lambda * \chi^{-1} = \chi\lambda * \chi\mu = \chi(\lambda * \mu) = \chi\Lambda.$$

Als Erstes verwenden wir die Ableitungsformel, dann die Formel (2), schließlich die Formel (3) und als Letztes die Formel (4).

4.6. Nullstellen der L-Funktionen.

Wesentlich ist folgender Satz:

Satz. *Ist χ ein Restklassencharakter, aber kein Hauptcharakter, so ist $L(1,\chi) \neq 0$.*

Für den Beweis wird auf die Literatur verwiesen. Der Beweis ist nicht ganz einfach (aber durchaus elementar). Siehe zum Beispiel eines der folgenden Bücher:

- Scheid: *Zahlentheorie*, p.363-365.

- Landau: *Vorlesungen über Zahlentheorie. Aus der elementaren Zahlentheorie.* Dort sind es die Sätze 151 und 152 (p.92-95).
- Hasse: *Vorlesungen über Zahlentheorie* gibt dafür mehrere Beweise: §15 *Das Nichtverschwinden der L-Reihen,* p.226-269.

Hier ein Beispiel, dass für ähnliche Funktionen $s = 1$ durchaus eine Nullstelle sein kann: Die Dirichlet-Reihe $\sum_n \frac{\mu(n^s)}{n^s} = 0$ hat bei $s = 1$ eine Nullstelle. Beweis: Siehe 5.1

Wir haben gesehen, dass $L(1, \chi) \neq 0$ den Dirichlet'schen Primzahlsatz impliziert. Genauer gilt: Ist $L(1, \chi) \neq 0$ für alle nicht-trivialen Restklassencharaktere modulo k, und ist $(k, l) = 1$, so gibt es unendlich viele Primzahlen $p \equiv l \mod k$. Stärker sogar: betrachten wir die $\phi(k)$ Restklassen $\bar{l}$ in $U(\mathbb{Z}/k)$, so sind die Primzahlen p (mit $p \neq k$) in gewisser Weise auf diese Restklassen gleichverteilt.

Was man hieraus lernen sollte: *Die Nicht-Existenz von Nullstellen von Dirichlet-Reihen gestattet es, Aussagen über die Verteilung der Primzahlen zu beweisen.* Dies entspricht der Bedeutung der Riemann'schen Vermutung: die Riemann'sche Vermutung besagt ja, dass die wesentlichen Nullstellen der ζ-Funktion alle Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Ist diese Vermutung richtig, so folgen daraus viele Aussagen über die Verteilung der Primzahlen. Schon die (bewiesene) Aussage, dass die ζ-Funktion keine Nullstelle mit Realteil > 1 hat, kann man verwenden, um den Primzahlsatz $\pi(x)\ \frac{\ln(x)}{x}$ zu beweisen.