5. Noch einmal: Zahlentheoretische Funktionen.

5.1. Der Ring Φ als Ring der formalen Dirichlet-Reihen!

Erinnerung: Ein Polynom mit Koeffizienten in einem Körper K ist nach Definition nichts anderes als eine abbrechende Folge $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ von Elementen aus K. Die beliebigen Folgen $a = (a_0, a_1, \dots)$ nennt man manchmal "formale" Potenzreihen und schreibt statt a auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, ohne sich um Konvergenz zu kümmern. Der Ring der formalen Potenzreihen ist dann nichts anderes als der Ring dieser Folgen mit komponentenweiser Addition und mit der Multiplikation, die man vom Polynomring her kennt. Ähnlich gehen wir nun mit dem Ring Φ der zahlentheoretischen Funktionen vor: wir **nennen** ihn einfach den Ring der formalen Dirichlet-Reihen.

Eine *formale Dirichlet-Reihe* ist nichts anderes als eine zahlentheoretische Funktion $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, wobei wir aber statt α lieber

$$\sum_n \frac{\alpha(n)}{n^s}$$

schreiben. Soweit möglich werden wir untersuchen für welche Werte $s \in \mathbb{C}$ (oder zumindest $s \in \mathbb{R}$) diese Reihe konvergiert oder sogar absolut konvergiert.

Konvergiert die Reihe $\sum_n \frac{\alpha(n)}{n^s}$ absolut für ein s, so auch für alle $s' \geq s$.

Wir ordnen also jeder zahlentheoretischen Funktion α die (formale) *Dirichlet-Reihe*

$$f_\alpha(s) = \sum_n \frac{\alpha(n)}{n^s}$$

zu; nach Definition werden zwei derartige formale Dirichlet-Reihen $f_\alpha,\ f_\beta$ nur dann als gleich angesehen, wenn $\alpha = \beta$ gilt. Sind α, β zahlentheoretische Funktionen, so haben wir im Abschnitt 4.4 Summe und Produkt der Dirichlet-Reihen $f_\alpha,\ f_\beta$ durch

$$f_\alpha + f_\beta = f_{\alpha+\beta},$$
$$f_\alpha \cdot f_\beta = f_{\alpha*\beta}$$

definiert, die Zuordnung $\alpha \mapsto f_\alpha$ ist demnach (sozusagen nach Definition) ein Isomorphismus zwischen dem Ring Φ der zahlentheoretischen Funktionen und dem Ring $\{f_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ der formalen Dirichlet-Reihen:

5.1.2. Satz. *Die Zuordnung $\alpha \mapsto \sum_n \frac{\alpha(n)}{n^s}$ ist ein Ring-Isomorphismus vom Ring der zahlentheoretischen Funktionen auf den Ring der formalen Dirichlet-Reihen.*

Addition und Multiplikation formaler Dirichlet-Reihen (also die Ring-Struktur auf der Menge der formalen Dirichlet-Reihen) sind natürlich nur deswegen von Interesse, weil man im Falle absolut konvergenter Dirichlet-Reihen auf diese Weise gerade die übliche Addition und Multiplikation erhält.

Die Ring-Isomorphie besagt insbesondere: *Genau dann ist die zahlentheoretische Funktion α bezüglich der Faltung invertierbar, wenn f_α im Ring der formalen Dirichlet-Reihen invertierbar ist,* dort schreibt man natürlich $\frac{1}{f_\alpha}$ für die zu f_α multiplikativ-inverse Dirichlet-Reihe (also $\frac{1}{f_\alpha} = f_{\alpha^{-1}}$).

Man erhält auf diese Weise eine Art Wörterbuch zwischen gewissen zahlentheoretischen Funktionen und Dirichlet-Reihen (wobei man nur solche betrachtet, die auf einem nicht-trivialen Intervall absolut konvergent sind):

Wörterbuch

Zahlentheoretische Funktion	**Dirichlet-Reihe**
Nullfunktion	Nullfunktion
Das Einselement I	Die Funktion 1
Die Funktion U	Die ζ-Funktion
$\mu = U^{-1}$	$\frac{1}{\zeta}$
$\tau = U * U$	ζ^2
χ (Restklassencharakter)	$L(s, \chi)$ (Dirichlet'sche L-Reihe)

Und man erhält interessante Formeln: Euler hat gezeigt $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Daraus folgt

$$\sum\nolimits_n \frac{\mu(n)}{n^2} = f_\mu(2) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$$

Oder auch: Da $\zeta(s)$ für $s > 1$ absolut konvergent und verschieden von Null ist, und $\lim_{s\to 1} \zeta(s) = \infty$ gilt, sehen wir, dass $f_\mu(s)$ für $s > 1$ absolut konvergent ist und dass gilt

$$\sum\nolimits_n \frac{\mu(n)}{n} = f_\mu(1) = 0.$$

Mathematisch gibt es keinen Unterschied, ob man über zahlentheoretische Funktionen oder über formale Dirichlet-Reihen spricht.

5.2. Die Funktion σ (oder besser: $\frac{\sigma(n)}{n}$).

5.2.1. Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $\sigma(n) = 2n$, so nennt man n *vollkommen.* Ist $\sigma(n) < 2n$, so nennt man n *defizient,* ist $\sigma(n) > 2n$, so nennt man n *abundant.* Hier wird also $\frac{\sigma(n)}{n}$ thematisiert und es wird gefragt, of dieser Quotient $\frac{\sigma(n)}{n}$ kleiner, gleich oder größer als 2 ist.

> Man kann hier fragen, warum man $\frac{\sigma(n)}{n}$ gerade mit der Zahl 2 vergleicht. Eigentlich könnte man ja für jede reelle Zahl r fragen: Gilt $\frac{\sigma(n)}{n} = r$ oder $< r$ oder $> r$. Warum interessiert man sich für den Fall $r = 2$? Die alten Griechen waren daran interessiert, Augustinus (christlicher Theologe, um 400), wie auch Boethius (christlicher Philosoph, um 500) fanden die vollkommenen Zahlen wichtig. Daran anschließend gibt es eine Fülle von obskuren Überlegungen zur Bedeutung von vollkommenen Zahlen. Aber der Fall $r = 2$ scheint wirklich eine zahlentheoretische Bedeutung zu besitzen.)

Satz (Euklid–Euler). *Eine gerade Zahl ist genau dann vollkommen, wenn sie die Form $2^{r-1}(2^r - 1)$ hat, wobei $p = 2^r - 1$ eine Primzahl ist.*

Die Primzahlen der Form $2^r - 1$ sind die **Mersenne'schen Primzahlen.** Wir sehen also: *Die geraden vollkommen Zahlen entsprechen bijektiv den Mersenne'schen Primzahlen.*

Für kleine Werte von r erhält man folgende Liste vollkommener Zahlen

r	p	n
2	3	$2 \cdot 3 = 6$
3	7	$4 \cdot 7 = 28$
5	31	$16 \cdot 31 = 496$
7	127	$64 \cdot 127 = 8128$,

die alle den Griechen bekannt waren. Man kennt zur Zeit 47 Mersenne'sche Primzahlen, siehe `http://primes.utm.edu/mersenne/`, die größte derzeit bekannte Mersenne'sche Primzahl ist $2^{43\,112\,609} - 1$, daher ist die größte bekannte vollkommene Zahl die Zahl

$$2^{43\,112\,608}(2^{43\,112\,609} - 1)$$

Wir erinnern daran, dass $2^r - 1$ höchstens dann eine Primzahl sein kann, wenn r selbst eine Primzahl ist (2.11.8), und dass zum Beispiel für $r = 11$ die Mersenne-Zahl $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ **keine** Primzahl ist, entsprechend ist $n = 2^{10}(2^{11} - 1) = 2096128$ nicht vollkommen: es ist $\sigma(n)/2 = 2210760$, also ist n abundant.

Wir haben auch notiert, dass man nicht weiß, ob es unendlich viele Mersenne'sche Primzahlen (also auch unendlich viele gerade vollkommene Zahlen) gibt. Hinzuzufügen ist, dass man keine einzige ungerade vollkommene Zahl kennt — auch dies eine offene Frage.

Beweis des Satzes. Euklid zeigte schon: Ist $p = 2^r - 1$ eine Primzahl, so ist $n = 2^{r-1} \cdot p$ vollkommen. Es ist nämlich

$$\sigma(n) = \sigma(2^{r-1} \cdot p) = \sigma(2^{r-1})\sigma(p) = (2^r - 1)(p + 1) = p \cdot 2^r = 2 \cdot p \cdot 2^{r-1} = 2 \cdot n.$$

Die Umkehrung stammt von Euler. Sei also n eine gerade vollkommene Zahl. Schreibe $n = 2^t \cdot m$ mit t maximal. Dann ist m ungerade und es gilt

$$\sigma(n) = \sigma(2^t)\sigma(m) = (2^{t+1} - 1)\sigma(m).$$

Da wir voraussetzen, dass n vollkommen ist, ist demnach

$$(2^{t+1} - 1)\sigma(m) = 2n = 2^{t+1} \cdot m,$$

also

$$\frac{\sigma(m)}{m} = \frac{2^{t+1}}{2^{t+1} - 1}.$$

Rechts steht ein gekürzter Bruch, also entsteht der linke Bruch aus dem rechten durch Erweitern: Es gibt demnach s mit

$$\begin{aligned} m &= s(2^{t+1} - 1) \\ \sigma(m) &= s(2^{t+1}) \end{aligned}$$

Nun ist $\sigma(m) = \sigma(s(2^{t+1} - 1))$ die Teilersumme von $m = s(2^{t+1} - 1)$. Die Zahl m hat mindestens die beiden Teiler s und $s(2^{t+1} - 1) > s$. Die Summe dieser beiden Teiler ist aber schon $s(2^{t+1}) = \sigma(m)$. Damit sehen wir, dass m keine weiteren Teiler haben kann. Insbesondere hat m nur zwei Teiler. Die einzigen Zahlen, die genau zwei Teiler haben, sind die Primzahlen. Also sehen wir: m ist eine Primzahl und für s als den kleineren der beiden Teiler muss gelten $s = 1$. Es gilt also $m = 2^{t+1} - 1$ und, wie wir gezeigt haben, ist dies eine Primzahl.

Die Zahlen $H_m = \sum_{i=t}^m \frac{1}{t}$ nennt man die *harmonischen* Zahlen. Es sind dies die Partialsummen der (divergenten!) harmonischen Reihe, siehe 5.3.

5.2.2. *Die Funktion $\frac{\sigma(n)}{n}$ ist unbeschränkt.*

Beweis: Es ist $\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{d}$, denn mit d ist auch $\frac{n}{d}$ ein Teiler von n. Betrachte die Zahl $n = m!$. Die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ sind Teiler von n, also ist

$$\sigma(n) = \sum\nolimits_{d|n} \frac{n}{d} \ \geq \ \sum\nolimits_{i=1}^m \frac{n}{i},$$

und demnach

$$\frac{\sigma(n)}{n} \ \geq \ \sum\nolimits_{i=1}^m \frac{1}{i} = H_m.$$

Da die harmonischen Zahlen unbeschränkt sind, folgt die Behauptung.

Zweiter Beweis: Es gilt: *Ist n quadratfrei, so ist $\frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{p|n}(1 + \frac{1}{p})$*. Dies folgt unmittelbar aus 3.4.1 (für eine Primzahl p ist $\sigma(p) = p + 1$ also $\frac{\sigma(p)}{p} = 1 + \frac{1}{p}$). Es ist aber $\prod_{n \in M}(1 + \frac{1}{n}) \geq \sum_{n \in M} \frac{1}{n}$ für jede endliche Menge $M \subset \mathbb{N}$, und wir wissen, dass $\sum_p \frac{1}{p}$ divergent ist.

5.3. Die harmonische Reihe und die Euler-Konstante γ.

In all unseren Überlegungen im Abschnitt 4 und jetzt in 5.1 und 5.2 spielt die (divergente!) harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ eine herausragende Rolle: es ist dies gerade der "Wert" $\zeta(1)$. Die harmonische Reihe soll hier noch einmal im Detail betrachtet werden.

Warum heißt die harmonische Reihe "harmonische Reihe"? Für die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gilt: a_n isr das **harmonische Mittel** von a_{n-1} und a_{n+1}, für alle $n \geq 2$ (durch diese Bedingung und die Startwerte $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ ist die harmonische Reihe eindeutig bestimmt).

Zur Erinnerung: Das *harmonische Mittel* zweier positiver Zahlen a, b ist $2ab/(a+b)$. Sind $0 < a < b$ zwei positive reelle Zahlen, so betrachtet man üblicherweise das arithmetische Mittel $A(a,b) = \frac{1}{2}(a+b)$, das geometrische Mittel $G(a,b) = \sqrt{ab}$ und das harmonische Mittel $H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$. Es gilt

$$a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < b$$

und $G(H(a,b), A(a,b)) = G(a,b)$.

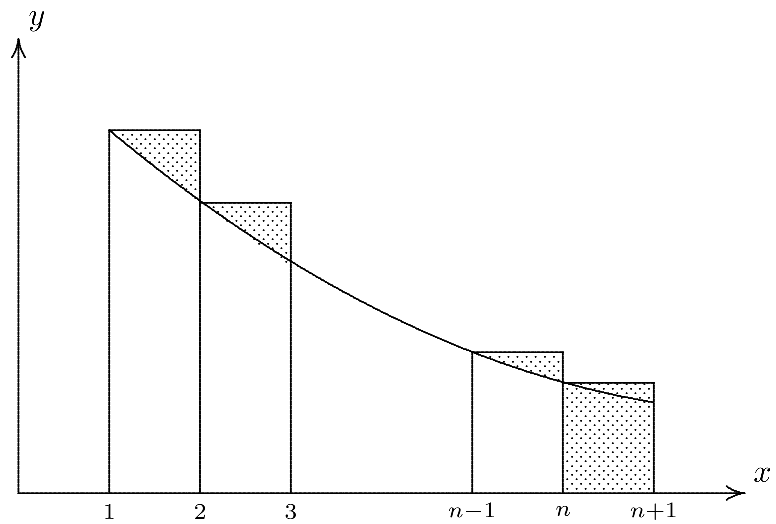
Die Divergenz der harmonischen Reihe geht auf Nikolaus von Oresme (∼1320 - 1382) zurück (in: *Quaestiones super Geometriam Euclidis*, ∼1350.)

5.3.1. Lemma. *Sei $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit nicht-negativen Werten. Dann ist die Reihe*

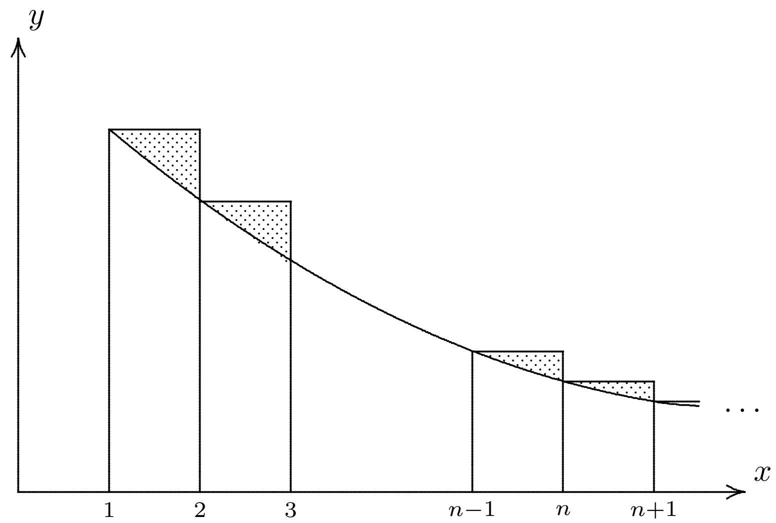
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}\,x\Big)_n$$

monoton fallend und konvergent mit einem Grenzwert $0 \leq \alpha \leq f(1)$.

Hier wird das Integral $\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}\,x$ mit der Obersumme des Integrals $\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ zu den Stützstellen $1, 2, \ldots, n, n+1$ verglichen:



Der Limes liefert also den Flächeninhalt der folgenden schraffierten Fläche (sie besteht aus abzählbar vielen Einzelstücken):



Beweis: Zu betrachten ist also die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}\,x$. Offensichtlich ist $a_n \geq a_{n+1}$, denn es ist

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= -f(n+1) + \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_n^{n+1} (f(x) - f(n+1))\,\mathrm{d}\,x \geq 0, \end{aligned}$$

da $f(x) \geq f(n+1)$ für $x \leq n+1$. Die Zahlen a_n sind nicht negativ, also ist $(a_n)_n$ eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge, und demnach konvergent. Ist α der Grunzwert, so gilt natürlich $0 \leq \alpha \leq f(1)$.

Anwendung. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Die Zahl $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ haben wir die n-te *harmonische Zahl* genannt.

5.3.2. *Es gibt* $0 < \gamma < 1$ *mit*

$$\boxed{\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln(n))}$$

Man nennt γ die *Euler-Konstante* oder auch *Euler-Mascheroni Konstante*. Die ersten Stellen von γ sind

$$\gamma = 0,5772156649\ldots.$$

Beweis: Wie gesagt, wir betrachten $f(x) = \frac{1}{x}$. Es ist $\int_1^n \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x = \ln(n)$, also:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x \right) = \lim_{n\to\infty} \left(H_n - \ln(n) \right).$$

Man weiß überraschend wenig über diese Konstante. Es ist nicht einmal bekannt, ob γ irrational ist!

Und es gilt:

$$\lim_{s\to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma.$$