## 8. Farey-Folgen.

Die Menge $\mathcal{F}_n$ der rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ mit $1 \le b \le n$ und $0 \le a \le b$ (zusammen mit der Ordnung $\le$) nennt man die *n-te Farey-Folge*, zum Beispiel ist

$$\mathcal{F}_5 = \{ \tfrac{0}{1} < \tfrac{1}{5} < \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{3} < \tfrac{2}{5} < \tfrac{1}{2} < \tfrac{3}{5} < \tfrac{2}{3} < \tfrac{3}{4} < \tfrac{4}{5} < \tfrac{1}{1} \}.$$

Offensichtlich gilt: $\mathcal{F}_1 = \{\frac{0}{1},\ \frac{1}{1}\}$, also $|\mathcal{F}_1| = 2$. Ist $n \ge 2$, so ist $|\mathcal{F}_n| = |\mathcal{F}_{n-1}| + \phi(n)$. Also ist

$$|\mathcal{F}(n)| = 1 + \sum_{a=1}^{n} \phi(a).$$

Gehören die Brüche $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ zu $\mathcal{F}_n$, und gibt es kein $x \in \mathcal{F}_n$ mit $\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}$, so nennen wir $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *Farey-Nachbarn* (falls notwendig, mit dem Zusatz: in $\mathcal{F}_n$).

**8.1. Lemma:**

(a) *Aus* $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ *(mit* $b, y, d \in \mathbb{N}$*) und* $bc - ad = 1$ *folgt* $y \ge b + d$.

(b) *Gilt* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(mit* $b, d \in \mathbb{N}$*) so ist*

$$\tfrac{a}{b} < \tfrac{a+c}{b+d} < \tfrac{c}{d}.$$

(c) *Sind* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *Farey-Nachbarn in* $\mathcal{F}_n$*, so ist* $b + d > n$.

Beweis von (a): Aus $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ folgt $ay < bx$, also $bx - ay \ge 1$. Aus $\frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ folgt $xd < yc$, also $yc - xd \ge 1$. Wir sehen daher:

$$\begin{aligned} y &= y(bc - ad) = ybc - yad \\ &= ybc - xbd + xbd - yad = b(yc - xd) + d(xb - ya) \ge b + d. \end{aligned}$$

Beweis von (b): $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ liefert $ad < bc$. Also ist $a(b+d) < b(a+c)$ und $(a+c)d < c(b+d)$.

Beweis von (c): Seien $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ Farey-Nachbarn in $\mathcal{F}_n$. Wäre $b + d \le n$, so wäre auch $\frac{a+c}{b+d}$ in $\mathcal{F}_n$. Aber nach (b) liegt $\frac{a+c}{b+d}$ zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, Widerspruch.

**8.2. Satz.** *Seien* $0 \le \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$*, geschrieben in gekürzter Form. Genau dann sind dies Farey-Nachbarn (für ein n), wenn gilt* $bc - ad = 1$.

Beweis: Seien $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ Farey-Nachbarn in $\mathcal{F}_n$. Nach Vorausetzung ist $(a, b) = 1$, also gibt es eine Lösung der Bézout'schen Gleichung $bx - ay = 1$. Mit $[x, y]$ sind auch die Paare $[x + ta, y + tb]$ Lösungen, man kann daher voraussetzen, dass $n - b < y \le n$ gilt. Wegen $n - b \ge 0$ ist $y > 0$, also auch $x > 0$, denn $bx - ay = 1$. Also haben wir $x, y$ gefunden mit $x > 0$, $0 \le n - b < y \le n$ und $bx - ay = 1$.

Betrachte den Bruch $\frac{x}{y}$. Aus $bx - ay > 0$ folgt $bx > ay$, also $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$.

Wäre $\frac{c}{d} < \frac{x}{y}$, so wenden wir 8.1.(a) auf $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{x}{y}$ und erhalten $d \ge b + y$. Aber wegen $\frac{c}{d} \in \mathcal{F}_n$ und $n - b < y$ gilt $d \le n < b + y$. Widerspruch. Also gilt $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} \le \frac{c}{d}$ und $y \le n$. Wir haben also drei Brüche in $\mathcal{F}_n$ vor uns. Da nach Voraussetzung $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ Nachbarn sind, folgt $\frac{x}{y} = \frac{c}{d}$.

Also $x = c, y = d$ und demnach $bc - ad = bx - ay = 1$.

Sei nun umgekehrt $bc - ad = 1$. Sei $n$ das Maximum von $b$ und $d$. Nach Definition gehören dann $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zu $\mathcal{F}_n$. Wären sie keine Farey-Nachbarn in $\mathcal{F}_n$, so gäbe es einen Bruch $\frac{x}{y}$ in $\mathcal{F}_n$ mit $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$. Aus 8.1 (a) folgt $y \geq b+d$, aber $b+d > n$, Widerspruch.

**8.3.** Sind $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ Farey-Nachbarn, so nennt man $\frac{a+c}{b+d}$ die *Mediante* von $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$.

**Folgerungen 1.** *Seien $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ gekürzte Farey-Nachbarn (und gekürzte Brüche). Dann gilt:*

(a) *Sowohl $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ als auch $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ sind Farey-Nachbarn.*

(b) *Es ist $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$.*

(c) Es ist $(b, d) = 1$.

(d) Ist $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ und sind auch $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ und $\frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ Farey-Nachbarn, so ist $\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d}$

Beweis: (a) Aus $bc - ad = 1$ folgt sowohl $b(a+c) - a(b+d) = 1$ als auch $(b+d)c - (a+c)d = 1$.

(b) $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} = \frac{1}{bd}$.

(c) Aus $bc - ad = 1$ folgt, dass $b, d$ teilerfremd sind.

(d) Wir können annehmen, dass auch $\frac{x}{y}$ ein gekürzter Bruch ist. Nach Voraussetzung sind $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ und auch $\frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ Farey-Nachbarn in $\mathcal{F}_y$, Wegen 8.1.$(a)$ ist $y \geq bd$, also sehen wir, dass auch die Mediante $\frac{a+c}{b+d}$ zu $\mathcal{F}_y$ gehört. Wir vergleichen $\frac{x}{y}$ und $\frac{a+c}{b+d}$. Fall 1: $\frac{a+c}{b+d} \leq \frac{x}{y}$. Die Definition der Farey-Nachbarschaft in $\mathcal{F}_y$ besagt nun gerade: aus $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{x}{y}$ folgt $\frac{a+c}{b+d} = \frac{x}{y}$. Fall 2: $\frac{x}{y} < \frac{a+b}{b+d}$, also $\frac{x}{y} < \frac{a+b}{b+d} < \frac{c}{d}$. Wieder verwenden wir die Farey-Nachbarschafts-Definition, diesmal erhalten wir einen Widerspruch.

Es sollte betont werden, dass durch (2) die Mediante charakterisiert wird!

**Folgerung 2.** *Sei $0 < \frac{x}{y} < 1$ ein gekürzter Bruch. Dann gibt es Farey-Nachbarn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ mit $b, d < y$, sodass gilt: $x = a + c,\ y = b + d$.*

Beweis: Der Bruch $\frac{x}{y}$ gehört zu $\mathcal{F}_y$ und wegen $\mathcal{F}_1 = \{0 < 1\}$ ist $y > 1$. Seien $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ und $\frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ Farey-Nachbarn in $\mathcal{F}_d$. Wegen Folgerung 1 (c) ist $b < y$ und $d < y$, also gehören $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zu $\mathcal{F}_{y-1}$. In $\mathcal{F}_{y-1}$ müssen aber $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ Farey-Nachbarn sein. Demnach sind wir in der Situation von Folgerung 1 (d) und sehen: $\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d}$.

**Folgerung 3.** *Betrachten die Farey-Folge:*

$$\mathcal{F}_n = \{\ 0 = \tfrac{p_0}{q_0} < \tfrac{p_1}{q_1} < \cdots < \tfrac{p_t}{q_t} = 1\ \}.$$

*Es ist*

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{q_{i-1}q_i} = 1.$$

Beweis: In Folgerung 1 (b) haben wir gesehen: $\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{1}{q_{i-1}q_i}$. Also sehen wir:

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{q_{i-1}q_i} = \sum_{i=1}^{t} \left( \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \right) = \frac{p_t}{q_t} - \frac{p_0}{q_0} = 1 - 0 = 1.$$

**8.4. Lemma.** *Sei $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben, sei $0 < \alpha < 1$ irrational. Dann gibt es Farey-Nachbarn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (gekürzt) mit $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$ und sowohl $b > m$, als auch $d > m$.*

Betrachte die Zahlen $|\alpha - \frac{p}{q}|$ mit $\frac{p}{q} \in \mathcal{F}_m$, und bilde ihr Minimum $\epsilon$. Es ist $\epsilon > 0$, denn $\mathcal{F}_m$ ist endliche Menge und $\alpha$ ist nicht rational. Wähle eine natürliche Zahl $n > \frac{1}{\epsilon}$, also $\frac{1}{n} < \epsilon$. In $\mathcal{F}_n$ gibt es Farey-Nachbarn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ mit $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$. Da $\mathcal{F}_n$ alle Zahlen $\frac{u}{n}$ mit $0 \leq u \leq n$ enthält, ist der Abstand zweier benachbarter Zahlen in $\mathcal{F}_n$ höchstens $\frac{1}{n}$, daher ist $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{n}$ und auch $|\alpha - \frac{c}{d}| < \frac{1}{n}$. Wegen $\frac{1}{n} < \epsilon$ sehen wir: weder $\frac{a}{b}$, noch $\frac{c}{d}$ gehört zu $\mathcal{F}_m$, also $b > m,\ d > m$.

**8.5. Satz von Hurwitz.** *Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ irrational, so gibt es unendlich viele Brüche $\frac{a}{b}$ mit*

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{\sqrt{5}\, b^2}.$$

Beweis: Es reicht, den Satz für $0 < \alpha < 1$ zu beweisen. Seien $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ Farey-Nachbarn in $\mathcal{F}_n$ mit $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$. Betrachte die Mediante $\frac{a+c}{b+d}$. Wir zeigen: Mindestens eine der drei Zahlen $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}$ kann für die Behauptung des Satzes gewählt werden. Wenn nicht, dann gilt:

$$\alpha - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}b^2}, \tag{1}$$

$$\frac{c}{d} - \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}d^2}, \tag{2}$$

$$|\alpha - \frac{a+c}{b+d}| \geq \frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2} \tag{3}$$

Die Summe der ersten beiden Ungleichungen (2) und (1) liefert

$$\frac{1}{bd} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{c}{d} - \alpha + \alpha - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

Fall 1: $\frac{a+c}{b+d} < \alpha$. Statt (3) haben wir dann sogar

$$\alpha - \frac{a+c}{b+d} \geq \frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2}. \tag{3'}$$

Addieren wir die Ungleichungen (2) und (3′), so erhalten wir wie eben:

$$\frac{1}{(b+d)d} = \cdots \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{(b+d)^2} + \frac{1}{d^2}\right)$$

Fall 2: $\frac{a+c}{b+d} > \alpha$, also

$$\frac{a+c}{b+d} - \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2} \tag{3''}$$

Diesmal addieren wir (3″) und (1) und erhalten

$$\frac{1}{(b+d)b} = \cdots \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{(b+d)^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch, wegen des folgenden Lemmas:

**Lemma.** *Es gibt keine natürliche Zahlen $x, y$ mit*

$$\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{x(x+y)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\right).$$

Beweis: Die beiden Ungleichungen liefern:

$$\sqrt{5}xy \geq x^2 + y^2 \qquad \text{und} \qquad \sqrt{5}x(x+y) \geq x^2 + (x+y)^2 = 2x^2 + 2xy + y^2.$$

Addition ergibt

$$\sqrt{5}x^2 + 2\sqrt{5}xy = \sqrt{5}(x^2 + 2xy) \geq 3x^2 + 2xy^2 + 2y^2,$$

Wir multiplizieren mit 2 und verschieben die linkte Seite nach rechts:

$$\begin{aligned} 0 &\geq -2\sqrt{5}x^2 - 4\sqrt{5}xy + 6x^2 + 4xy^2 + 4y^2 \\ &= 4y^2 - 4(\sqrt{5}-1)xy + (5 - 2\sqrt{5} + 1)x^2 \\ &= \big(2y - (\sqrt{5}-1)x\big)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt: $2y - (\sqrt{5}-1)x = 0$, und demnach $\sqrt{5} = 2\frac{y}{x} + 1$. Aber $\sqrt{5}$ ist nicht rational!

Wegen Lemma 8.4 wissen wir, dass $b$ und $d$ (und damit auch $b+d$) beliebig groß gewählt werden können. Damit ist der Satz bewiesen.

**Bemerkung.** Sucht man zu einer irrationalen Zahl $\alpha$ rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ mit $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^2}$, so braucht man nur Lemma 8.4: Dies liefert Farey-Nachbarn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (gekürzt) mit $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$ und $b > n, d > n$. Bilde die Mediante $\frac{a+c}{b+d}$.

Ist $\alpha < \frac{a+c}{b+d}$, so liegt $\alpha$ zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+c}{b+d}$. Es ist $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+d)} < \frac{1}{b^2}$. Also ist $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^2}$.

Ist dagegen $\alpha > \frac{a+c}{b+d}$, so betrachtet man entsprechend das Intervall zwischen $\frac{a+b}{c+d}$ und $\frac{c}{d}$ und sieht: $|\alpha - \frac{c}{d}| < \frac{1}{d^2}$.

**8.6. Zusatz.** *Die Konstante $\frac{1}{\sqrt{5}}$ im Satz von Hurwitz ist best-möglich.* Es gilt nämlich die folgende Aussage: *Ist $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{5}}$, so gibt es irrationale Zahlen $\alpha$, sodass es nur endlich viele rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ mit*

$$|\alpha - \tfrac{a}{b}| < \delta\tfrac{1}{b^2}$$

*gibt* (zum Beispiel gilt dies für $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

Beweis: Sei $|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{b}| < \delta\frac{1}{b^2}$. Setzen wir $\gamma = b(a - \frac{b}{2} - \frac{b}{2}\sqrt{5})$, so ist

$$|\gamma| = b|a - \tfrac{b}{2} - \frac{b}{2}\sqrt{5}| = b^2|\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \tfrac{a}{b}| < \delta.$$

Die $\gamma$ definierende Gleichung schreiben wir um:

$$a - \tfrac{b}{2} = \tfrac{b}{2}\sqrt{5} + \tfrac{\gamma}{b}$$

und quadrieren sie:

$$a^2 - ab + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{5}{4}b^2 + \gamma\sqrt{5} + \tfrac{\gamma^2}{b^2}.$$

also

$$a^2 - ab - b^2 = \gamma\sqrt{5} + \tfrac{\gamma^2}{b^2}.$$

Die linke Seite kann nicht Null sein, denn sonst wäre $\frac{a}{b}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^2 - X - 1$, aber dessen Nullstellen sind $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, also nicht rational. Daher ist

$$1 \le |\gamma\sqrt{5} + \tfrac{\gamma^2}{b^2}| \le |\gamma|\sqrt{5} + \tfrac{\gamma^2}{b^2} < \delta\sqrt{5} + \tfrac{\delta^2}{b^2},$$

also

$$1 - \delta\sqrt{5} < \tfrac{\delta^2}{b^2}.$$

Wir setzen $\delta < \frac{1}{\sqrt{5}}$ voraus, also $\delta\sqrt{5} < 1$, daher ist $0 < 1 - \delta\sqrt{5}$. Wir erhalten

$$b^2 < \frac{\delta^2}{1 - \delta\sqrt{5}}.$$

Wir sehen also: $b$ ist betragsmäßig beschränkt: es gibt also nur endlich viele mögliche $b$ und demnach auch nur endlich viele mögliche Brüche $\frac{a}{b}$.

**8.7.** (a) Den Satz von Hurwitz 8.5 können wir folgendermaßen umformulieren: *Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ irrational, so gibt es unendlich viele $\frac{a}{b}$ sodass $\alpha$ in jedem Intervall*

$$\left]\frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{5}\,b^2}, \frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{5}\,b^2}\right[$$

*liegt.*

(b) In 8.6 haben wir gesehen: Ist $\gamma > \sqrt{5}$, so gibt es irrationale Zahlen $\alpha$, die nur in endlich vielen Intervallen

$$\left]\frac{a}{b} - \frac{1}{\gamma\,b^2}, \frac{a}{b} + \frac{1}{\gamma\,b^2}\right[$$

liegen.

(c) Für $\gamma = 4$ gilt sogar:

**Satz.** *Die Zahl* $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ *liegt in keinem der Intervalle*

$$\left]\frac{a}{b} - \frac{1}{4\,b^2}, \frac{a}{b} + \frac{1}{4\,b^2}\right[,$$

*mit* $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$.

Beweis: Angenommen, es gäbe $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{4b^2} \;<\; \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \;<\; \frac{a}{b} + \frac{1}{4b^2}.$$

Mutliplikation mit $b$ liefert

$$a - \frac{1}{4b} \;<\; \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,b \;<\; a + \frac{1}{4b}.$$

Offensichtlich muss $a$ positiv sein (wegen der zweiten Ungleichung). Die linke Ungleichung liefert $a < \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\right)b < b$, denn $\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0,707$.

Da $a$ positiv ist, ist $1 < 4ab$, also $\frac{1}{4b} < a$. Demnach handelt es sich hier um Ungleichungen mit drei positive Zahlen, durch Quadrieren erhalten wir entsprechende Ungleichungen:

$$a^2 - \frac{a}{2b} + \frac{1}{16\,b^2} \;\le\; \tfrac{1}{2}b^2 \;\le\; a^2 + \frac{a}{2b} + \frac{1}{16\,b^2}$$

Wir subtrahieren $a^2$ und multiplizieren mit 2:

$$-\frac{a}{b} + \frac{1}{8\,b^2} \;\le\; b^2 - 2a^2 \;\le\; \frac{a}{b} + \frac{1}{8\,b^2}.$$

Wegen $a < b$ sehen wir

$$-1 < -\frac{a}{b} < -\frac{a}{b} + \frac{1}{8\,b^2}, \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b} + \frac{1}{8\,b^2} < \frac{a}{b} + \frac{1}{b} \le 1.$$

Insgesamt erhalten wir

$$-1 < b^2 - 2a^2 < 1.$$

Da $b^2 - 2a^2$ eine ganze Zahl ist, ist $b^2 - 2a^2 = 0$, also $\frac{b^2}{a^2} = 2$. Dies widerspricht aber der Irfrationalität von $\sqrt{2}$.