Aufgabe 12.1

Die einfachste (wobei hier einfach leider nicht für kurz steht) Möglichkeit, sich die Struktur zu überlegen, die die Quadratzahlen haben müssen, ist, die Multiplikationsstruktur zu benutzen, die auf den sogenannten Cayley-Zahlen (oder Oktonionen) $\mathbb{O}$ gegeben ist. Diese kann man sich veranschaulichen als 8-dimensionalen, reellen Vektorraum mit Basis $(1, I, J, K, L, M, N, O)$, wobei die Basiselemente einer bestimmten Multiplikationsrelation gehorchen (ähnlich wie die komplexen Zahlen einen 2-dimensionalen, rellen Vektorraum mit Basis $(1, I)$ und Struktur $I^2 = -1$ bilden). Die Struktur auf den Cayley-Zahlen ist definiert durch

$$\begin{gathered}
I^2 = J^2 = K^2 = L^2 = M^2 = N^2 = O^2 = -1 \\
I = JK = LM = ON = -KJ = -ML = -NO \\
J = KI = LN = MO = -IK = -NL = -OM \\
K = IJ = LO = NM = -JI = -OL = -MN \\
L = MI = NJ = OK = -IM = -JN = -KO \\
M = IL = OJ = KN = -LI = -JO = -NK \\
N = JL = IO = MK = -LJ = -OI = -KM \\
O = NI = JM = KL = -IN = -MJ = -LK
\end{gathered}$$

wobei einige dieser Angaben redundant sind. Offensichtlich definieren diese Regeln keine kommutative Multiplikation (sie ist noch nicht einmal assoziativ), aber ähnlich wie auf komplexen Zahlen kann man auf den Cayley-Zahlen eine Norm definieren. Ist

$$X = x_1 + x_2 I + x_3 J + x_4 K + x_5 L + x_6 M + x_7 N + x_8 O$$

eine Cayley-Zahl mit $x_i \in \mathbb{R}$, so ist die konjugierte Cayley-Zahl (analog zur komplexen Konjugation) gegeben durch

$$\bar{X} = x_1 - x_2 I - x_3 J - x_4 K - x_5 L - x_6 M - x_7 N - x_8 O.$$

Die Norm von einer Cayley-Zahl erhält man mittels

$$\mathcal{N}(X) := X\overline{X} \overset{1}{=} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2,$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $\mathcal{N}$ multiplikativ ist, d.h. sind $X, Y \in \mathbb{O}$, so gilt

$$\mathcal{N}(XY) = \mathcal{N}(X)\mathcal{N}(Y). \tag{1}$$

Diese Identität soll in der Aufgabe gezeigt werden, denn die rechte Seite entspricht

$$\mathcal{N}(X)\mathcal{N}(Y) = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + y_7^2 {+}_8^2\right)$$

nach Definition und damit dem Produkt von zwei Elementen aus der Menge auf dem Aufgabenzettel (dort sind die x_i, $y_i \in R$, während diese in den Oktonionen aus $\mathbb{R}$ stammen - dies ändert jedoch die folgende Rechnung nicht). Um die Gleichheit (1) zu zeigen, multiplizieren wir zunächst zwei Cayley-Zahlen X, Y. Dazu seien die x_i, $y_i \in R$. Wir nutzen, dass R kommutativ ist und wenden sofort die Multiplikationsrelationen an (dabei ist auf die Reihenfolge zu achten; beispielsweise ist $IJ = -JI$), um Produkte von zwei Basiselementen als ein Basiselement auszudrücken.

$$\begin{aligned}
XY = {} & (x_1 + x_2 I + x_3 J + x_4 K + x_5 L + x_6 M + x_7 N + x_8 O)(y_1 + y_2 I + y_3 J + y_4 K + y_5 L + y_6 M + y_7 N + y_8 O) \\
= {} & (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 - x_7 y_7 - x_8 y_8) \\
& + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + x_5 y_6 - x_6 y_5 - x_7 y_8 + x_8 y_7) \cdot I \\
& + (x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2 + x_5 y_7 + x_6 y_8 - x_7 y_5 - x_8 y_6) \cdot J \\
& + (x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1 + x_5 y_8 - x_6 y_7 + x_7 y_6 - x_8 y_5) \cdot K \\
& + (x_1 y_5 - x_2 y_6 - x_3 y_7 - x_4 y_8 + x_5 y_1 + x_6 y_2 + x_7 y_3 + x_8 y_4) \cdot L \\
& + (x_1 y_6 + x_2 y_5 - x_3 y_8 + x_4 y_7 - x_5 y_2 + x_6 y_1 - x_7 y_4 + x_8 y_3) \cdot M \\
& + (x_1 y_7 + x_2 y_8 + x_3 y_5 - x_4 y_6 - x_5 y_3 + x_6 y_4 + x_7 y_1 - x_8 y_2) \cdot N \\
& + (x_1 y_8 - x_2 y_7 + x_3 y_6 + x_4 y_5 - x_5 y_4 - x_6 y_3 + x_7 y_2 + x_8 y_1) \cdot O
\end{aligned}$$

[1] Nachrechnen!

Darauf wenden wir nun die Norm an und erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(XY) &= \left(x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6 - x_7y_7 - x_8y_8\right)^2 \\
&+ \left(x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_5y_6 - x_6y_5 - x_7y_8 + x_8y_7\right)^2 \\
&+ \left(x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2 + x_5y_7 + x_6y_8 - x_7y_5 - x_8y_6\right)^2 \\
&+ \left(x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1 + x_5y_8 - x_6y_7 + x_7y_6 - x_8y_5\right)^2 \\
&+ \left(x_1y_5 - x_2y_6 - x_3y_7 - x_4y_8 + x_5y_1 + x_6y_2 + x_7y_3 + x_8y_4\right)^2 \\
&+ \left(x_1y_6 + x_2y_5 - x_3y_8 + x_4y_7 - x_5y_2 + x_6y_1 - x_7y_4 + x_8y_3\right)^2 \\
&+ \left(x_1y_7 + x_2y_8 + x_3y_5 - x_4y_6 - x_5y_3 + x_6y_4 + x_7y_1 - x_8y_2\right)^2 \\
&+ \left(x_1y_8 - x_2y_7 + x_3y_6 + x_4y_5 - x_5y_4 - x_6y_3 + x_7y_2 + x_8y_1\right)^2 \\
&= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_1^2 + x_3^2y_1^2 + x_4^2y_1^2 + x_5^2y_1^2 + x_6^2y_1^2 + x_7^2y_1^2 + x_8^2y_1^2 \\
&+ x_1^2y_2^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_2^2 + x_4^2y_2^2 + x_5^2y_2^2 + x_6^2y_2^2 + x_7^2y_2^2 + x_8^2y_2^2 \\
&+ x_1^2y_3^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_3^2 + x_4^2y_3^2 + x_5^2y_3^2 + x_6^2y_3^2 + x_7^2y_3^2 + x_8^2y_3^2 \\
&+ x_1^2y_4^2 + x_2^2y_4^2 + x_3^2y_4^2 + x_4^2y_4^2 + x_5^2y_4^2 + x_6^2y_4^2 + x_7^2y_4^2 + x_8^2y_4^2 \\
&+ x_1^2y_5^2 + x_2^2y_5^2 + x_3^2y_5^2 + x_4^2y_5^2 + x_5^2y_5^2 + x_6^2y_5^2 + x_7^2y_5^2 + x_8^2y_5^2 \\
&+ x_1^2y_6^2 + x_2^2y_6^2 + x_3^2y_6^2 + x_4^2y_6^2 + x_5^2y_6^2 + x_6^2y_6^2 + x_7^2y_6^2 + x_8^2y_6^2 \\
&+ x_1^2y_7^2 + x_2^2y_7^2 + x_3^2y_7^2 + x_4^2y_7^2 + x_5^2y_7^2 + x_6^2y_7^2 + x_7^2y_7^2 + x_8^2y_7^2 \\
&+ x_1^2y_8^2 + x_2^2y_8^2 + x_3^2y_8^2 + x_4^2y_8^2 + x_5^2y_8^2 + x_6^2y_8^2 + x_7^2y_8^2 + x_8^2y_8^2 \\
&= \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + y_7^2 + {}_8^2\right) \\
&= \mathcal{N}(X)\,\mathcal{N}(Y)
\end{aligned}
$$

was sofort die Gleichung (1) und die Abgeschlossenheit der Menge in der Aufgabe liefert.