

Lösungs-Skizzen zur Aufgabe 6.1.(a)

(b) Bestimme alle Zahlen n mit $\phi(n) = 24$.

Ist $p|n$, so ist $(p-1)|\phi(n)$, siehe (a). Hier ist die Liste der Teiler d von $\phi(n) = 24$, und darunter ist $p = d + 1$ notiert, falls dies eine Primzahl ist:

d	=	1	2	3	4	6	8	12	24
p	=	2	3	–	5	7	–	13	–

Wir sehen also: nur die Primzahlen $p = 2, 3, 5, 7, 13$ können als Teiler von n auftreten.

Ist $p^e|n$, mit $e \geq 2$, so gilt $p|\phi(n)$, dies impliziert $p = 2$ oder $p = 3$.

Ist $2^a|n$, so ist $2^{a-1}|n$, also $a - 1 \leq 3$, also $a \leq 4$.

Ist $3^b|n$, so ist $3^{b-1}|n$, also $b - 1 \leq 1$, also $b \leq 2$.

Hier ist also die Liste der maximal möglichen Primzahlpotenzen p^e (als Faktoren von n), darunter steht jeweils $\phi(p^e)$:

p^e	=	2	4	8	16	3	9	5	7	13
$\phi(p^e)$	=	1	2	4	8	2	6	4	6	12

Die Zahl $24 = \phi(n)$ ist also Produkt von Zahlen der unteren Reihe zu schreiben.

Wegen $3|24$ sieht man, dass eine (und nur eine) der Zahlen 9, 7, 13 Teiler von n sein muss. Insgesamt gibt es demnach die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{array}{lll}
 9 \cdot 5 & 9 \cdot 5 \cdot 2, & 9 \cdot 8, \\
 7 \cdot 5, & 7 \cdot 5 \cdot 2, & 7 \cdot 8, \quad 7 \cdot 3 \cdot 4, \\
 13 \cdot 3, & 13 \cdot 3 \cdot 2, & 13 \cdot 4.
 \end{array}$$