Während der Weihnachtspause werden einige Routine-Zettel im Internet veröffentlicht. Jede dieser Aufgaben sollte in höchstens 5 Minuten lösbar sein, sie entsprechen typischen Klausur-Aufgaben. Lösungen sollen nicht abgegeben werden — Schwierigkeiten können aber natürlich in den Übungsgruppen im neuen Jahr besprochen werden. Soweit nichts anderes notiert, dürfen alle in der Vorlesung bewiesenen Sätze als bekannt vorausgesetzt werden.

Routine-Zettel 1

1. Bestimme mit dem Euklid'schen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $11\,917$ und $12\,053$.

2. Bestimme mit dem Euklid'schen Algorithmus eine Bézout-Gleichung für den größten gemeinsamen Teiler von 13 und 23.

3. Wie zeigt man mit dem Sieb des Eratosthenes, dass 151 eine Primzahl ist? (Anzugeben sind die Primzahlen, die man schon kennen muss.)

4. Bestimme mit Hilfe der Legendre-Formel $(400!)_7$.

5. Wieviele Endnullen hat $200!$ (in der Darstellung im Zehner-System).

6. Welche der folgenden Primzahlen sind Teiler von $\binom{200}{100}$?

127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179

7. Zeige: Es gibt eine Primzahl p mit 123456789 Ziffern in der Dezimalschreibweise, deren erste Ziffer eine 1 ist.

8. Sei ϕ die Euler'sche ϕ-Funktion. Gesucht ist $\phi(n)$ für $n = 10, 100, 1000, 27, 395$.

9. Zeige: Ist a ein Teiler von b, so ist $\phi(a)$ ein Teiler von $\phi(b)$.

10. Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit $\phi(n) = 4$ an.

11. Sei μ die Möbius-Funktion. Gesucht sind die Werte $\mu(n)$ für $n = 10, 100, 1000, 35, 7919$.

12. Für welche natürliche Zahlen a gilt $\mu(a^2) > 0$?

13. Sei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von n. Gesucht ist $\tau(n)$ für $n = 10\,000, 27, 35, 105, 7919$.

14. Zeige: Ist p Primzahl, und gilt $a^2 \equiv b^2 \mod p$, so ist p ein Teiler von $a+b$ oder $a-b$.

15. Man zeige: Jede vierte Potenz n^4 hat im Zehnersystem als Einerziffer eine der Zahlen $0, 1, 5, 6$.

16. Gesucht ist ein System zweier Kongruenzen

$$x \equiv a \mod 6 \quad \text{und} \quad x \equiv b \mod 15$$

das keine (gemeinsame) Lösung besitzt.

17. Gesucht ist ein System zweier Kongruenzen

$$x \equiv a \mod 6 \quad \text{und} \quad x \equiv b \mod 35$$

das keine (gemeinsame) Lösung besitzt.

18. Gesucht ist x mit

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 17, \\ x &\equiv 3 \mod 19, \\ x &\equiv 4 \mod 23. \end{aligned}$$

Verwende dabei die folgenden Bézout-schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= 180 \cdot 17 + (-7) \cdot 19 \cdot 23 \\ 1 &= (-144) \cdot 19 + 7 \cdot 17 \cdot 23 \\ 1 &= (-14) \cdot 23 + 1 \cdot 17 \cdot 19. \end{aligned}$$

19. Man gebe einen Teiler $1 < t < n$ der Zahl $n = 2^{1769} + 1$ an ($1769 = 29 \cdot 61$).

20. Man gebe einen Teiler $1 < t < n$ der Zahl $n = 2^{1769} - 1$ an ($1769 = 29 \cdot 61$).