Routine-Zettel 2

1. Sei C_{15} die zyklische Gruppe der Ordnung 15. Man bestimme für alle $1 \leq t \leq 15$ die Anzahl $a(t)$ der Elemente der Gruppe C_{15}, die die Ordnung t haben.

2. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element mit ungerader Ordnung. Sei $h = g^2$. Zeige: Es gibt $t \in \mathbb{N}$ mit $h^t = g$.

3. Seien G und H Gruppen und $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei $g \in G$ ein Element endlicher Ordnung. Zeige: Die Ordnung von $f(g)$ ist ein Teiler der Ordnung von g.

4. Sei G eine endliche Gruppe und $g \in G$. Zeige oder widerlege: Ist die Ordnung von g ungerade, so ist auch die Ordnung von g^2 ungerade.

5. Sei G eine endliche Gruppe und $g \in G$. Zeige oder widerlege: Ist die Ordnung von g^2 ungerade, so ist auch die Ordnung von g ungerade.

6. Zeige oder widerlege: Sei R kommutativer Ring, $r \in R$. Ist $r^2 = 0$, so ist $r = 0$.

7. Es gibt genau vier Restklassen-Charaktere $\chi_0^{(5)}, \chi_1^{(5)}, \chi_2^{(5)}, \chi_3^{(5)}$ modulo 5. Die Werte $\chi_t^{(5)}(n)$ für $0 \leq t \leq 2$ und $2 \leq n \leq 4$ seien schon bekannt. Wie findet man die Werte a, b, c?

$\chi \setminus n$	1	2	3	4	5	$\cdots$
$\chi_0^{(5)}$	1	1	1	1	0	
$\chi_1^{(5)}$	1	i	$-i$	-1	0	
$\chi_2^{(5)}$	1	-1	-1	1	0	
$\chi_3^{(5)}$	1	a	b	c	0	

8. Sei $k \in \mathbb{N}$. Sei χ ein Restklassencharakter modulo k. Es gilt immer $\chi(k+1) = 1$, warum?

9. Zeige: Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat genau dann eine ungerade Anzahl von Teilern, wenn n eine Quadratzahl ist.

10. Man gebe alle invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}/15$ an.

11. Man zeige, dass 3 eine Primitivwurzel modulo 7 ist.

12. Man zeige, dass 2 keine Primitivwurzel modulo 7 ist.

13. Zeige: Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^{193} \equiv a \mod 195$.

14. Man gebe ein $n \in \mathbb{N}$ an, so dass keine der Zahlen n, $n+1, \ldots,$ $n+111$ eine Primzahl ist.

15. Seien $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ Primzahlen, sei $e_i \in \mathbb{N}$ für alle i, sei $n = p_1^{e_1} \cdots p_m^{e_m}$. Man bestimme die Anzahl der Teiler d von n mit $\mu(d) = 1$.

16. Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x^2 + y^2 = n$. Zeige oder widerlege:

(a) Ist n quadratfrei, so ist $(x, y) = 1$.

(b) Ist $(x, y) = 1$, so ist n quadratfrei.

17. Seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplikative Funktionen. Definiere $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ folgendermaßen: Ist $t \in \mathbb{N}_0$ und ist $q \in \mathbb{N}$ ungerade, so sei $h(2^t q) = f(2^t) g(q)$. Zeige: h ist multiplikativ.

18. Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ mit $p|n$. Zeige $\phi(pn) = p\,\phi(n)$.

19. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige: $\binom{2n}{n}$ ist keine Quadratzahl.

20. Ist $n \in \mathbb{N}$ defizient, so ist auch n^2 defizient.

21. Beweise oder widerlege: Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $2^n \equiv n \mod p$, so ist n Primzahl.

22. Zeige: Sei $p \geq 3$ Primzahl und $z \in \mathbb{Z}$. Ist $x^2 \equiv -1 \mod p$, so ist $p \equiv 1 \mod 4$.

23. Zeige: Ist $t \in \mathbb{N}$ und ist $2^t - 1$ Primzahl, so ist t Primzahl.