Trainigsaufgaben zur Elementaren Zahlentheorie

Aufgabe 1 *Man finde für die folgenden* $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ *eine Lösung der Gleichung*

$$d = na + mb$$

mit $d = ggT\,(a,b)$.

$$a = 2214;\ b = 522 \qquad a = 385;\ b = 497$$

Aufgabe 2 *Gibt es ganzzahlige Lösungen für*

$$1736x + 1519y = 101 \qquad 1736x + 1519y = 439 \qquad 91x + 10y + 2z = 3?$$

Aufgabe 3 *Ist* $2^m + 1$ *prim, so ist* $m = 2^n$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$ *(Fermat-Primzahlen).*

Aufgabe 4 *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $n = \sum_{i=1}^{t} a_i 10^i$ *die* 10*-adische Darstellung von* n *mit Ziffernfolge* a_i. *Zeige:*

$$11 \mid n \iff 11 \mid \left(\sum_{i=0}^{t} (-1)^i a_i \right),$$

d.h. 11 *teilt die Wechselsumme der Ziffern von* n.
Gib analoge Regeln für Teilbarkeit durch 7 *und* 13 *an und zeige damit: Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *ist*

$$x_n = 5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$$

durch 11 *teilbar.*

Aufgabe 5 *Wie lautet der Rest von* 314^{159} *bei Division durch* 7*? Wie lautet der Rest von* 314^{162} *bei Division durch* 163*? Wie lauten die letzten beiden Stellen in der Dezimalschreibweise von* 19^{355}*?*

Aufgabe 6 *Zeige, dass* $3^{105} + 4^{105}$ *durch* 7 *teilbar ist.*

Aufgabe 7 *Bestimme die letzte Ziffer von* $3^{1998} + 2^{1998}$.

Aufgabe 8 *Berechne* $\phi\,(n)$ *für* $n \in \{625, 2007, 2008, 2009, 2010\}$.

Aufgabe 9 *Berechne* $\phi\,(\phi\,(p))$ *für* $p = 2^{2^n} + 1$, *prim.*

Aufgabe 10 *Zeige: Es existiert kein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\phi\,(n) = 14$.

Aufgabe 11 *Eine Bäuerin trägt einen Korb voller Eier. Entnimmt sie die Eier in Paaren, so bleibt ein Ei im Korb übrig. Entnimmt sie sie zu dreien, bleiben zwei übrig. Entnimmt sie sie zu vieren, bleiben drei übrig. Entnimmt sie sie zu fünfen, bleiben vier übrig. Entnimmt sie sie zu sechsen, bleiben fünf übrig. Entnimmt sie sie zu siebenen, so bleibt kein einziges Ei im Korb. Wie viele Eier sind im Korb, wenn dieser höchstens* 500 *Eier fasst?*

Aufgabe 12 *Löse folgende Kongruenzen simultan und gib alle Lösungen in* $\mathbb{Z}$ *an*

$$x \equiv 3 \bmod 20 \qquad x \equiv 7 \bmod 12 \qquad x \equiv 13 \bmod 15$$

Aufgabe 13 *Welche der folgenden quadratischen Gleichungen ist lösbar?*

$$x^2 \equiv 7 \bmod 53 \qquad x^2 \equiv 14 \bmod 31 \qquad x^2 \equiv 53 \bmod 7 \qquad x^2 \equiv 197 \bmod 7437 \qquad x^2 \equiv 625 \bmod 9973$$

Hinweis: $7437 = 3 \cdot 37 \cdot 67$

Aufgabe 14 *Welche Werte kann eine Quadratzahl* $\bmod 9$ *annehmen?*

Aufgabe 15 *Welche der Zahlen* $281, 291, 301, 311$ *sind quadratische Reste* $\bmod 2008$*?*

Aufgabe 16 *Sei* $p \equiv 1 \bmod 5$. *Zeige: In* $(\mathbb{Z}\diagup(p))^*$ *gibt es ein Element* x *der Ordnung* 5 *und mit diesem* x *ist*

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)x + \left(\frac{2}{5}\right)x^2 + \left(\frac{3}{5}\right)x^3 + \left(\frac{4}{5}\right)x^4$$

eine Lösung für $y^2 \equiv 5 \bmod p$. *Hier ist* $\left(\frac{a}{5}\right)$ *das Legendre-Symbol.*

Aufgabe 17 *Bestimme* $\bmod 23$ *("ohne zu potenzieren")* $2^{11},\ 3^{11},\ 4^{11},\ 5^{11},\ 21^{11},\ 22^{11}$

Aufgabe 18 *Bestimme alle Primitivwurzeln und quadratische Reste* $\bmod 17$

Aufgabe 19 *Wieviele Primitivwurzeln besitzt die Einheitengruppe des Körpers* $\mathbb{F}_{1999} (= \mathbb{Z} \diagup (1999))$*?*

Aufgabe 20 *Wahr oder falsch?*

i. 2 *ist Primitivwurzel* $\bmod 13$

ii. Für alle p *prim gibt es eine Primitivwurzel* $\bmod p$

iii. 4 *ist Primitivwurzel* $\bmod 7$*.*

Aufgabe 21 *Sei* G *eine endliche, abelsche Gruppe. Zeige:* $\prod_{g \in G} g^2 = 1$*.*

Aufgabe 22 *Sei* G *eine Gruppe. Zeige: Ist* $g^2 = 1$ *für alle* $g \in G$*, so ist* G *abelsch.*

Aufgabe 23 *Betrachte die Ordnung von* 4 *in* $(\mathbb{Z} \diagup (10), +)$ *und von* $2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ *in* $(\mathbb{Z} \diagup (15), \cdot)$*.*

Aufgabe 24 *Bestimme alle nilpotenten Elemente im Ring* $\mathbb{Z}/(378)$*.*

Aufgabe 25 *Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch* $f_0 := 0$*,* $f_1 := 1$*,* $f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$*. Zeige:*

i. $ggT(f_n, f_{n-1}) = 1$

ii. $f_{n+k} = f_{n+1} f_k + f_k f_{k-1}$ *(Hinweis: vollst. Induktion)*

iii. $n \mid m \implies f_n \mid f_m$ *(Hinweis: vollst. Induktion)*

Aufgabe 26 *Seien* $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ *mit* $a^2 + b^2 = c^2$ *(die sogenannten pythagoräischen Tripel). Zeige:*

$$a \cdot b \cdot c \equiv 0 \bmod 60$$

Aufgabe 27 *Es gilt:*

$$\begin{aligned} 6!0! &\equiv -1 \bmod 7 \\ 5!1! &\equiv 1 \bmod 7 \\ 4!2! &\equiv -1 \bmod 7 \\ 3!3! &\equiv 1 \bmod 7 \end{aligned}$$

Wie lauten entsprechene Aussagen $\bmod 11$*? Beweise die folgende Verallgemeinerung: Ist* p *prim, so ist*

$$(p-n)!\,(n-1)! \equiv (-1)^n \bmod p \text{ für } 1 \leq n \leq p$$

Aufgabe 28 *Sei* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*, dann ist die* n*-te Partialsumme der harmonische Reihe keine ganze Zahl:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}$$

Aufgabe 29 *Es seien* p *prim und* $a, b, c \in \mathbb{N}$*, die jeweils zu* p *teilerfremd sind. Zeige: Dann hat die quadratische Gleichung*

$$ax^2 + by^2 \equiv c \bmod p$$

eine nichttriviale Lösung $(x, y) \neq (0, 0)$ *mit* $x, y \in \mathbb{Z}$*.*