

Präsenz-Aufgaben 10.

1. Schreiben Sie z in der Form $z = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aus der Vorlesung ist bekannt: $i \cdot i = i^2 = -1$, $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$.

$$(a) \quad i^{15} = i^{14} \cdot i = (i^2)^7 \cdot i = (-1)^7 \cdot i = -i \Rightarrow i^{15} = 0 + (-1)i,$$

$$(b) \quad i^{-15} = \frac{1}{i^{15}} \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i \cdot i} = \frac{i}{-(i \cdot i)} = \frac{i}{1} = i \Rightarrow i^{-15} = 0 + 1i,$$

$$(c) \quad -i^{15} = -(i^{15}) \stackrel{(a)}{=} -(-i) = i \Rightarrow -i^{15} = 0 + 1i,$$

$$(d) \quad -i^{-15} = -(i^{-15}) \stackrel{(b)}{=} -i \Rightarrow -i^{-15} = 0 + (-1)i,$$

$$(e) \quad i^{14} = (i^2)^7 = (-1)^7 = -1 \Rightarrow i^{14} = -1 + 0i,$$

$$(f) \quad i^{-14} = \frac{1}{i^{14}} \stackrel{(e)}{=} \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow i^{-14} = -1 + 0i,$$

$$(g) \quad -i^{14} = -(i^{14}) \stackrel{(e)}{=} -(-1) = 1 \Rightarrow -i^{14} = 1 + 0i,$$

$$(h) \quad -i^{-14} = -(i^{-14}) \stackrel{(f)}{=} -(-1) = 1 \Rightarrow -i^{-14} = 1 + 0i,$$

2. Schreiben Sie $z = z_1 + z_2$, $z = z_1 - z_2$, $z = z_1 \cdot z_2$, $z = \frac{z_1}{z_2}$ in der Form $z = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$(a) \quad z_1 = 1 + 3i \quad \text{und} \quad z_2 = 3 - 5i$$

- $z_1 + z_2 = 4 - 2i$,
- $z_1 - z_2 = -2 + 8i$,
- $z_1 \cdot z_2 = 3 - 5i + 9i - 15i^2 = 3 + 4i + 15 = 18 + 4i$,
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 3i)(3 + 5i)}{(3 - 5i)(3 + 5i)} = \frac{3 + 5i + 9i - 15}{9 + 25} = \frac{-12 + 14i}{34} = -\frac{6}{17} + \frac{7}{17}i$,

$$(b) \quad z_1 = 2 + 4i \quad \text{und} \quad z_2 = -2 - i$$

- $z_1 + z_2 = 3i = 0 + 3i$,
- $z_1 - z_2 = 4 + 5i$,
- $z_1 \cdot z_2 = -4 - 2i - 8i + 4 = -10i = 0 + (-10)i$,
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + 4i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} = \frac{-4 + 2i - 8i - 4}{4 + 1} = \frac{-8 - 6i}{5} = -\frac{8}{5} + \left(-\frac{6}{5}\right)i$,

$$(c) \quad z_1 = 3 + 5i \quad \text{und} \quad z_2 = i$$

- $z_1 + z_2 = 3 + 6i$,
- $z_1 - z_2 = 3 + 4i$,
- $z_1 \cdot z_2 = -5 + 3i$,
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+5i)(-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{5-3i}{-1} = 5 + (-3)i$.

3. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen z in der Form $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$ mit $\phi \in \mathbb{R}$.

Sei $z = a + bi$, dann $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Aus $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$ folgt damit

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \phi \quad \text{und} \quad b = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin \phi, \quad \text{d.h.}$$

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(a) $z = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right),$$

(b) $z = 1 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ und $\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{7\pi}{4}$

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right),$$

(c) $z = -1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $\cos \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4}$

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right),$$

(d) $z = -1 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ und $\cos \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{5\pi}{4}$

$$-1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{4} \right) \right).$$

4. Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Die Gleichung $z^2 + az + b = 0$ hat genau dann genau eine Lösung, wenn $a^2 = 4b$ gilt.

" $\Rightarrow$ " Hat die Gleichung $z^2 + az + b = 0$ genau eine Lösung, dann

$$\begin{aligned}
\underbrace{-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}_{z_1} &= \underbrace{-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}_{z_2} \\
&\Downarrow \\
\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} &= 0 \\
&\Downarrow \\
\frac{a^2}{4} - b &= 0 \\
&\Downarrow \\
a^2 &= 4b.
\end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Es gilt $a^2 = 4b$, dann $b = \frac{a^2}{4}$.

$$\begin{aligned}
z^2 + az + \frac{a^2}{4} &= 0 \\
&\Downarrow \\
z &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = -\frac{a}{2} \\
&\Downarrow \\
z^2 + az + b &= 0 \text{ hat genau eine Lösung.}
\end{aligned}$$

5. Sei $z \in \mathbb{C}$ weder reell noch rein imaginär, d.h., $z = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Man zeige:

- (a) Von den Punkten z und $\frac{1}{z}$ liegt einer in der oberen Halbebene, der andere in der unteren Halbebene.
- (b) Die Punkte z und $\frac{1}{z}$ liegen entweder beide in der rechten Halbebene oder beide in der linken Halbebene.

Sei $z = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \neq 0$, dann $\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha + \beta i} = \frac{\alpha - \beta i}{(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha - \beta i)$

Zu (a). Zu zeigen: Für $z = \alpha + \beta i$ und $\frac{1}{z} = \alpha' + \beta' i$ gilt:

$$\beta > 0 \Leftrightarrow \beta' < 0.$$

" $\Rightarrow$ " Angenommen $\beta > 0$, dann $\beta' = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} < 0$, weil $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ und $-\beta < 0$.

" $\Leftarrow$ " Angenommen $\beta < 0$, dann $\beta' = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} > 0$, weil $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ und $-\beta > 0$.

Zu (b). Zu zeigen: Für $z = \alpha + \beta i$ und $\frac{1}{z} = \alpha' + \beta' i$ gilt:

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha' > 0.$$

" $\Rightarrow$ " Angenommen $\alpha > 0$, dann $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} > 0$, weil $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

" $\Leftarrow$ " Angenommen $\alpha < 0$, dann $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} < 0$, weil $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ und $\alpha < 0$.

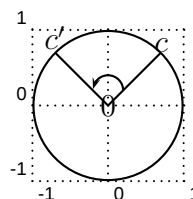
6. Seien z_1, z_2, z_3 komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis. Zeige: z_1, z_2, z_3 bilden genau dann ein gleichseitiges Dreieck, wenn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ gilt.

Wie aus der Vorlesung bekannt ist, kann jede komplexe Zahl z trigonometrisch dargestellt werden: $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$, d.h. z ist durch den Winkel ϕ und den Betrag $|z|$ eindeutig bestimmt. Der Winkel des Produkts von zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 ist die Summe von deren Winkeln und der Betrag ist das Produkt von den Beträgen $|z_1|$ und $|z_2|$. Liegen also z_1 und z_2 auf dem Einheitskreis, d.h. $|z_1| = 1$ und $|z_2| = 1$, dann liegt $z_1 \cdot z_2$ auch auf dem Einheitskreis, denn $|z_1 \cdot z_2| = 1 \cdot 1 = 1$. Insbesondere gilt für eine komplexe Zahl, die auf dem Einheitskreis liegt, $z \cdot \bar{z} = 1 + i0 = 1$. (Im Folgenden wird gelegentlich eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis durch den Winkel identifiziert.)

Seien nun z_1, z_2, z_3 komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis, dann sind folgende Behauptungen richtig:

I. $\angle(z_1, 0, z_2) = \angle(z_1 \cdot z_3, 0, z_2 \cdot z_3)$

(Mit $\angle(c, 0, c')$ wird der von $c, 0$ und c' gebildete Winkel bezeichnet).



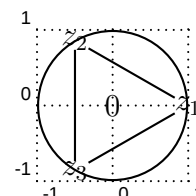
Seien α_1, α_2 und α_3 die zu z_1, z_2 und z_3 gehörenden Winkel und $\angle(z_1, 0, z_2) = \alpha$, dann $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ (oder $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$). Die komplexen Zahlen $z_1 \cdot z_3$ und $z_2 \cdot z_3$ liegen auch auf dem Einheitskreis und die zugehörigen Winkel sind $\alpha_1 + \alpha_3$ sowie $\alpha_2 + \alpha_3$. Es ist leicht zu sehen, dass für $\angle(z_1 \cdot z_3, 0, z_2 \cdot z_3)$ gilt:

$$\begin{aligned} \angle(z_1 \cdot z_3, 0, z_2 \cdot z_3) &= (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_3) = \alpha \\ \text{(oder } \angle(z_1 \cdot z_3, 0, z_2 \cdot z_3) &= (\alpha_1 + \alpha_3) - (\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha), \end{aligned}$$

anders gesagt $\alpha = \angle(z_1, 0, z_2) = \angle(z_1 \cdot z_3, 0, z_2 \cdot z_3)$. Der Winkel $\angle(z_1, 0, z_2)$ wird durch die Multiplikation von z_1 und z_2 mit $z_3 \neq 0$ nicht geändert.

II. Sei $z_1 = 1$, dann gilt: z_1, z_2, z_3 bilden ein gleichseitiges Dreieck $\Leftrightarrow z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

und $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (oder $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$).



" $\Rightarrow$ " Bilden z_1, z_2, z_3 ein gleichseitiges (und damit ein gleichwinkliges) Dreieck, dann o.B.d.A. $\angle(z_1, 0, z_2) = \angle(z_2, 0, z_3) = \angle(z_3, 0, z_1) = 120^\circ$. Dann beträgt der zu z_2 gehörige Winkel 120° , d.h., $z_2 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und der zu z_3 gehörende Winkel beträgt $120^\circ + 120^\circ = 240^\circ$, d.h. $z_3 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

" $\Leftarrow$ " Die komplexen Zahlen $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sind die dritten Einheitswurzeln, die ein gleichwinkliges und damit ein gleichseitiges Dreieck bilden.

III. Sei $z_1 = 1$, dann gilt: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (oder $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$).

" $\Rightarrow$ " Seien $z_2 = \cos \phi_2 + i \sin \phi_2$ und $z_3 = \cos \phi_3 + i \sin \phi_3$ und $1 + z_2 + z_3 = 0$, d.h. $z_2 + z_3 = (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) + (\cos \phi_3 + i \sin \phi_3) = -1$. Daraus folgt: $\sin \phi_2 = -\sin \phi_3 = \sin(-\phi_3)$ und damit $\phi_2 = -\phi_3$. Weiterhin erhalten wir: $\cos \phi_2 + \cos \phi_3 = \cos(-\phi_3) + \cos \phi_3 = 2 \cos \phi_3 = -1$ und damit $\cos \phi_3 = -\frac{1}{2}$, d.h. $\phi_3 = -\phi_2 = 120^\circ$.

Durch das Einsetzen in z_2 und z_3 erhalten wir das erwünschte Ergebnis.

" $\Leftarrow$ " klar.

Behauptung. Seien z_1, z_2, z_3 komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis. Zeige: z_1, z_2, z_3 bilden genau dann ein gleichseitiges Dreieck, wenn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ gilt. (Im Folgenden wird mit ω_3 die dritte Einheitswurzel $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ bezeichnet. Offensichtlich gilt $\omega_3^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.)

" $\Rightarrow$ " Angenommen z_1, z_2, z_3 liegen auf dem Einheitskreis und bilden ein gleichseitiges (und damit gleichwinkliges) Dreieck. Insbesondere gilt $\angle(z_1, 0, z_2) = \angle(z_2, 0, z_3) = \angle(z_3, 0, z_1) = 120^\circ$. Da $\bar{z}_1$ auch auf dem Einheitskreis liegt, folgt aus I.:

$$\angle(z_1 \cdot \bar{z}_1, 0, z_2 \cdot \bar{z}_1) = \angle(z_2 \cdot \bar{z}_1, 0, z_3 \cdot \bar{z}_1) = \angle(z_3 \cdot \bar{z}_1, 0, z_1 \cdot \bar{z}_1) = 120^\circ$$

Daraus folgt: $z_1 \cdot \bar{z}_1, z_2 \cdot \bar{z}_1$ und $z_3 \cdot \bar{z}_1$ bilden ein gleichseitiges Dreieck; außerdem gilt $z_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$. Aus II. folgt $z_2 \cdot \bar{z}_1 = \omega_3$ und $z_3 \cdot \bar{z}_1 = \omega_3^2$ und aus III. folgt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_3 \cdot \bar{z}_1 &= 0 \\ \Downarrow \\ \bar{z}_1 (z_1 + z_2 + z_3) &= 0 \\ \Downarrow \quad (\bar{z}_1 \neq 0) \\ z_1 + z_2 + z_3 &= 0 \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Angenommen, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Zu zeigen ist $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$. (Zur Erinnerung $z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = z_3 \bar{z}_3 = 1$). Es gilt

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= |z_1 + \underbrace{(-z_2)}_{=z_1+z_3}|^2 = |2z_1 + z_3|^2 = (2z_1 + z_3) \overline{(2z_1 + z_3)} = (2z_1 + z_3)(2\bar{z}_1 + \bar{z}_3) \\ &= 4 \underbrace{z_1 \bar{z}_1}_{=z_3 \bar{z}_3} + 2\bar{z}_1 z_3 + 2z_1 \bar{z}_3 + \underbrace{z_3 \bar{z}_3}_{z_1 \bar{z}_1} = 4z_3 \bar{z}_3 + 2z_1 \bar{z}_3 + 2\bar{z}_1 z_3 + z_1 \bar{z}_1 \\ &= (2z_3 + z_1) \overline{(2z_3 + z_1)} = |2z_3 + \underbrace{z_1}_{=-z_3-z_2}|^2 = |z_3 - z_2|^2 = |z_2 - z_3|^2 \end{aligned}$$

Aus $|z_1 - z_2|^2 = |z_2 - z_3|^2$ folgt $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$. In analoger Weise lässt sich auch $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ beweisen.

Ein alternativer Beweis: Angenommen, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, dann

$$\begin{aligned}
 (z_1 + z_2 + z_3) \cdot \bar{z}_1 &= 0 \\
 \Downarrow \\
 \underbrace{z_1 \cdot \bar{z}_1}_{=1} + z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_3 \cdot \bar{z}_1 &= 0 \\
 \Downarrow \quad (\text{III.}) \\
 z_2 \cdot \bar{z}_1 = \omega_3 \quad \text{und} \quad z_3 \cdot \bar{z}_1 = \omega_3^2
 \end{aligned}$$

Aus II. folgt, dass $z_1 \cdot \bar{z}_1, z_2 \cdot \bar{z}_1, z_3 \cdot \bar{z}_1$ ein gleichseitiges Dreieck bilden, d.h.

$$\angle(z_1 \cdot \bar{z}_1, 0, z_2 \cdot \bar{z}_1) = \angle(z_2 \cdot \bar{z}_1, 0, z_3 \cdot \bar{z}_1) = \angle(z_3 \cdot \bar{z}_1, 0, z_1 \cdot \bar{z}_1) = 120^\circ.$$

Nach I. gilt $\angle(z_1, 0, z_2) = \angle(z_2, 0, z_3) = \angle(z_3, 0, z_1) = 120^\circ$ und demnach bilden z_1, z_2, z_3 ein gleichseitiges Dreieck.