Präsenz-Aufgaben 11.

1. *Zeige: Die Mandelbrotmenge $\mathbb{M}$ ist symmetrisch zur x-Achse.*

Seien $c \in \mathbb{C}$ und die Folge der komplexen Zahlen $(z_n)_n$ wie folgt definiert:

$$z_1 = c,\ z_2 = c^2 + c,\ z_3 = (c^2+c)^2 + c,\ z_4 = ((c^2+c)^2+c)^2 + c, \ldots, z_n = z_{n-1}^2 + c, \ldots.$$

Die Menge $\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{ es existiert ein b} \in \mathbb{R} \text{ mit } |z_n| \leq b \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ ist die Mandelbrotmenge.

Zu zeigen: Sei $c \in \mathbb{M}$, dann $\bar{c} \in \mathbb{M}$.

Beweis. Seien $c = z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_n = x_n + iy_n$, dann $x_n = x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 + x_1$ und $y_n = 2x_{n-1}y_{n-1} + y_1$. Es existiert ein $b \in \mathbb{R}$ mit $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\bar{c} = x_1 - iy_1$ sei $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_n, \ldots)$ die zu $\bar{c}$ gehörige, oben beschriebene Folge, d.h. $\tilde{z}_1 = \bar{c},\ \tilde{z}_2 = \bar{c}^2 + \bar{c},\ \tilde{z}_3 = (\bar{c}^2+\bar{c})^2 + \bar{c}, \ldots, \tilde{z}_n = \tilde{z}_{n-1}^2 + \bar{c}, \ldots$.
Es gilt $\tilde{z}_n = x_n - iy_n = \bar{z}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, daraus folgt $|\bar{z}_n| = \sqrt{x_n^2 + (-y_n)^2} = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq b$ und damit gilt $\bar{c} \in \mathbb{M}$.

Definition. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}$ (oder mit Grenzwert a), falls gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$.

In diesem Fall verwendet man die Schreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2. *Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeige: Die Folge $(a_n + a_{n+1})_n$ ist konvergent. Wie lautet der Grenzwert?*

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert also ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$. Deshalb existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_{n+1} - a| < \epsilon$ für alle $n + 1 > n \geq N(\epsilon)$, d.h. die Folge $(a_{n+1})_n \rightsquigarrow (a_2, a_3, a_4 \ldots)$ ist auch konvergent und zwar gegen a $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a\right)$. Nach dem Satz (Summe konvergenter Folgen)[1], ist auch die Folge $(a_n + a_{n+1})_n \rightsquigarrow (a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \ldots)$ konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a + a = 2a$.

3. *Seien $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ reelle Folgen. Sei $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Sind die beiden Folgen $(a_n)_n$ und $(c_n)_n$ konvergent und haben sie den gleichen Grenzwert x, so ist auch $(b_n)_n$ konvergent mit Grenzwert x.*

[1] *Seien $(b_n)_n$ und $(d_n)_n$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$. Dann ist auch die Folge $(c_n)_n$ mit $c_n := b_n + d_n$ konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = b + d$.*

Sei also $\epsilon > 0$. Da die Folgen $(a_n)_n$ und $(c_n)_n$ gegen x konvergieren, existieren Zahlen $N_a(\epsilon), N_c(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - x| < \epsilon$ (d.h. $-\epsilon < a_n - x < \epsilon$ und damit $x - \epsilon < a_n < x + \epsilon$) für alle $n \geq N_a(\epsilon)$ und $|c_n - x| < \epsilon$ (d.h. $-\epsilon < c_n - x < \epsilon$ und damit $x - \epsilon < c_n < x + \epsilon$) für alle $n \geq N_c(\epsilon)$. Setze nun $N(\epsilon) = \max(N_a(\epsilon), N_c(\epsilon))$, dann gelten $x - \epsilon < a_n$ und $c_n < x + \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$ und damit $x - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < x + \epsilon$, also $|b_n - x| < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$.

4. *Zeige:*

(a) *Enthält eine reelle Folge keine Teilfolge, die streng monoton wachsend ist, so enthält sie eine Teilfolge, die monoton fallend ist.*

Zunächst zeigen wir:
Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m_n \in \mathbb{N}$ mit $m_1 > m_2 > \cdots > m_n > m_{n+1} > \cdots$, so dass $a_{m_1} \geq a_{m_2} \geq a_{m_3} \geq \cdots \geq a_{m_n} \geq a_{m_{n+1}} \geq \cdots$ und $a_{m_n} \geq a_{p_n}$ für alle $p_n \geq m_n + 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis (durch vollständige Induktion nach n).

(i) Induktionsanfang $n = 1$. Es existiert ein $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{m_1} \geq a_p$ für alle $p \geq m_1 + 1$. Angenommen es gäbe solch ein m_1 nicht, dann gäbe es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{m} > m$, so dass $a_m < a_{\tilde{m}}$. Dies steht im Widerspruch zu der Vorraussetzung, dass die Folge $(a_n)_n$ keine streng monoton wachsende Teilfolge hat.

(ii) Induktionsvoraussetzung. Seien $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ mit $m_1 > m_2 > \cdots > m_n$, so dass $a_{m_1} \geq a_{m_2} \geq \cdots \geq a_{m_n}$ und $a_{m_n} \geq a_{p_n}$ für alle $p_n \geq m_n + 1$.

(iii) Induktionsschritt $n \to n + 1$. Nach der Induktionsvoraussetzung existiert mindestens ein $\tilde{p} \in \mathbb{N}$, so dass $\tilde{p} \geq m_n + 1$ und $a_{\tilde{p}} = \max\{a_p \mid p \geq m_n + 1\}$. Setze $a_{m_{n+1}} := a_{\tilde{p}}$.

Auf diesem Wege erhalten wir eine monoton fallende Teilfolge $(b_n)_n$ von $(a_n)_n$:

$$(\underbrace{a_{m_1}}_{=:b_1}, \underbrace{a_{m_2}}_{=:b_2}, \underbrace{a_{m_3}}_{=:b_3}, \cdots, \underbrace{a_{m_n}}_{=:b_n}, \underbrace{a_{m_{n+1}}}_{=:b_{n+1}}, \cdots)$$

(b) *Es gibt reelle Folgen, die sowohl streng monoton wachsende, wie auch streng monoton fallende Teilfolgen enthalten.*

Beispiele:

(1) Sei $(a_n)_n$ mit $a_n = (-1)^n n$, also $(-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots)$, dann ist $(a_{2n-1})_n \rightsquigarrow (-1, -3, -5, -7, \ldots)$ eine streng monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_n$ und $(a_{2n})_n \rightsquigarrow (2, 4, 6, 8, \ldots)$ ist eine streng monoton wachsende Teilfolge von $(a_n)_n$.

(2) Sei $(a_n)_n$ mit $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, also $\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right)$, dann ist die Teilfolge $(a_{2n-1})_n \rightsquigarrow (-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots)$ eine streng monoton wachsende und $(a_{2n})_n \rightsquigarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots)$ ist eine streng monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_n$.

6. *Man bestimme die Nullstellen von* $X^3 - 4X + 1$ *mit Hilfe der Formel von Tartalia-Cardano.*

Für die Lösung dieser Aufgabe klicken Sie hier zu Seite 13 des:

Leitfaden 10. Die komplexen Zahlen (Abschnitte 10.5-10.7)