Präsenz-Aufgaben 13.

1.

(a) *Mit welcher Geschwindigkeit erreicht ein Turmspringer beim Sprung vom Zehnmeterturm die Wasseroberfläche?*

Zunächst ist die Zeit zu berechnen, die ein Turmspringer für den Sprung braucht, d.h. gesucht ist ein t mit $f(t) = a + bt + \frac{1}{2}ct^2$. Die Position zum Zeitpunkt $t = 0$ ist offensichtlich $a = 0$. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $b = 0$ und $c = 9,81\, m/s^2$ ist die Beschleunigung durch die Gravitationskraft. Wir erhalten:

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \;\Rightarrow\; t^2 = \frac{20}{9,81} = 2,0387 \;\Rightarrow\; t \approx 1,4278\,\text{sec}.$$

Die Geschwindigkeit nach t Sekunden des Fallens ist $f'(t) = c \cdot t$. Die Geschwindigkeit, die ein Turmspringer beim Sprung vom Zehnmeterturm erreicht, ist also

$$f'(1,4278) = 9,81 \cdot 1,4278 = 14\,\text{m/sec} \approx 50,4\,\text{km/h}.$$

(b) *Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit während des Flugs?*

I. Durchschnittsgeschwindigkeit = Weg/Zeit.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit während des Flugs ist damit $\dfrac{10}{1,4278} \approx 7\,\text{m/sec}$.

II. Durchschnittsgeschwindigkeit mit der Integralformel für Mittelwerte:

Die Geschwindigkeit nach t Sekunden ist bekanntlich $9,81 \cdot t$. Die Integralformel für für die Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit nach a Sekunden des Fallens ist $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a 9,81 \cdot t\,\mathrm{d}\,t$. Der Turmspringer erreicht nach 1,4278 Sekunden die Wasseroberfläche, somit ist die Durchschnittsgeschwindigkeit seines Flugs

$$\frac{\int_0^{1,4278} 9,81 \cdot t\,\mathrm{d}\,t}{1,4278 - 0} = \frac{9,81}{1,4278} \cdot \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{1,4278} = \frac{9,81}{2 \cdot 1,4278}\left(1,4278^2 - 0^2\right) \approx 7\ \text{m/sec}$$

2. *Die Tabelle zeigt die Sonnenauf- und -untergänge jeden Monats. Man berechne die mittlere Tageslänge für die Monate Januar, April und Juni unter Verwendung der Simpson'schen Formel* $\int_a^b f(x)\,d\,x \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right)$.

Der Funktionswert $f(x)$ zeigt die Länge des Tages x des fixierten Monats. Mit a wird der erste Tag des Monats bezeichnet und damit ist $f(a)$ die Tageslänge am ersten Tag des Monats. Mit b wird der der erste Tag des direkt danach folgenden Monats bezeichnet, also ist $f(b)$ die Tageslänge nach 30 Tagen. Die Mitte des Monats ist der Tag $\frac{a+b}{2}$ und $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ist die Tageslänge in der Mitte des Monats. Die mittlere Tageslänge ist somit

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x}{b-a} \approx \frac{\frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right)}{b-a} = \frac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right)$$

Januar.

- $f(a) = 16:24\,\text{h} - 8:27\,\text{h} = 7:57\,\text{h}$,
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 16:43\,\text{h} - 8:21\,\text{h} = 8:22\,\text{h}$,
- $f(b) = 17:11\,\text{h} - 8:01\,\text{h} = 9:10\,\text{h}$.

  Die mittlere Tageslänge ist $\dfrac{1}{6}\,(7:57 + 4 \cdot (8:22) + 9:10) = \dfrac{50:35}{6} \approx 8:26\,\text{h}$.

April.

- $f(a) = 18:56\,\text{h} - 6:02\,\text{h} = 12:54\,\text{h}$,
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 19:20\,\text{h} - 5:25\,\text{h} = 13:55\,\text{h}$,
- $f(b) = 19:42\,\text{h} - 4:57\,\text{h} = 14:15\,\text{h}$.

  Die mittlere Tageslänge ist $\dfrac{1}{6}\,(12:54 + 4 \cdot (13:55) + 14:15) = \dfrac{82:49}{6} \approx 13:48\,\text{h}$.

Juni.

- $f(a) = 20:28\,\text{h} - 4:12\,\text{h} = 16:16\,\text{h}$,
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 20:39\,\text{h} - 4:05\,\text{h} = 16:34\,\text{h}$,
- $f(b) = 20:42\,\text{h} - 4:08\,\text{h} = 16:34\,\text{h}$.

  Die mittlere Tageslänge ist $\dfrac{1}{6}\,(16:16 + 4 \cdot (16:34) + 16:34) = \dfrac{99:06}{6} \approx 16:31\,\text{h}$.

3. *Wie groß ist die durchschnittliche Fläche von Kreisen, deren Radien zwischen zwei und drei Zentimeter variieren?*

Die Fläche F_r eines Kreises mit Radius r ist $F_r = \pi \cdot r^2$. Die durchschnittliche Fläche von Kreisen, deren Radien zwischen zwei und drei Zentimeter variieren ist

$$\int_2^3 \pi \cdot r^2 \,\mathrm{d}\, r = \pi \int_2^3 r^2 \,\mathrm{d}\, r = \pi \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_2^3 = \frac{\pi}{3}\left(3^3 - 2^3\right) = \frac{19}{3} \cdot \pi.$$