

Präsenz-Aufgaben 3.

1. Seien A_1, A_2, B_1, B_2 Mengen. Man zeige:

(a) $(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) \cap (A_1 \cup B_2) \cap (A_2 \cup B_1)$

(b) Gilt auch die umgekehrte Inklusion?

Zu (a)

Fall 1. $x \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow x \in A_1$ und $x \in A_2$,

$\Rightarrow x \in (A_1 \cup B_1)$ und $x \in (A_2 \cup B_2)$ und $x \in (A_1 \cup B_2)$ und $x \in (A_2 \cup B_1)$,

$\Rightarrow x \in (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) \cap (A_1 \cup B_2) \cap (A_2 \cup B_1)$.

Fall 2. $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow x \in B_1$ und $x \in B_2$,

$\Rightarrow x \in (A_1 \cup B_1)$ und $x \in (A_2 \cup B_2)$ und $x \in (A_1 \cup B_2)$ und $x \in (A_2 \cup B_1)$,

$\Rightarrow x \in (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) \cap (A_1 \cup B_2) \cap (A_2 \cup B_1)$.

Zu (b) Die umgekehrte Inklusion gilt.

Beweis. Sei $x \in (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) \cap (A_1 \cup B_2) \cap (A_2 \cup B_1)$ und $x \notin (A_1 \cap A_2)$. Dann $x \notin A_1$ oder $x \notin A_2$, o.B.d.A. $x \notin A_1$. Aus der Voraussetzung folgt $x \in B_1$ und $x \in B_2$ und damit $x \in (B_1 \cap B_2)$, d.h. $x \in (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$.

Im Fall $x \notin (B_1 \cap B_2)$ gehen wir analog vor und erhalten $x \in (A_1 \cap A_2)$.

2. Bestimmen Sie einen Funktionsterm $f(x) = A \cdot \sin(C(t - D)) + B$ zur Beschreibung des gegebenen Graphen:

Die Bedeutung der Parameter:

A = Amplitudenstreckung bzw. -stauchung (Vertikale Streckung/Stauchung).

C = Änderung der Frequenz (Horizontale Streckung/Stauchung).

D = Phasen-Verschiebung (Horizontale Verschiebung).

B = Vertikale Verschiebung.

Aus der Zeichnung ist abzulesen: Die Sinus-Funktion ist horizontal nach oben um 0,5 verschoben, d.h. $B = 0,5$ und vertikal nicht verschoben, d.h. $D = 0$. Aus $A + B = 1,5$ erhalten wir $A = 1$. Und aus $C = \frac{\pi}{4}$ erhalten wir $C = \frac{4}{\pi}$. Es ergibt sich also

$$f(x) = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}(t - 0)\right) + 0,5.$$

3. Gegeben seien folgende Datenpaare

x_i	3	5	6	4	7
y_i	3	5	6	4	5

Durch Hinzufügen eines Zahlenpaares (x_6, y_6) soll erreicht werden, dass die Steigung der Regressionsgeraden

(a) größer wird,

(b) gleich bleibt,

(c) kleiner wird.

Berechnung der Steigung der Regressionsgeraden:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}$$

Es gilt $b = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i \cdot y_i) - 5 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \cdot \bar{x}^2} = \frac{105 - 100}{135 - 125} = 0,5$

Zu (a) Wähle $P(8, 8)$, dann $b = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i \cdot y_i) - 6 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6 \cdot \bar{x}^2} = \frac{169 - 154}{199 - 181,5} = 0,86 > 0,5$.

Zu (b) Wähle $P(5, 4)$, dann $b = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i \cdot y_i) - 6 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6 \cdot \bar{x}^2} = \frac{125 - 120}{160 - 150} = 0,5$.

Zu (c) Wähle $P(8, 3)$, dann $b = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i \cdot y_i) - 6 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6 \cdot \bar{x}^2} = \frac{129 - 126,5}{199 - 181,5} = 0,143... > 0,5$.

4. Die folgende Tabelle zeigt die Weltrekorde beim Diskuswerfen der Frauen.

1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
39,62m	49,54m	53,25m	57,04m	63,96m	71,80m	76,80m

Man bestimme die Regressionsgerade und prognostiziere auf diese Weise die Weltrekord-Leistung für das Jahr 2010.

Man kommentiere das Ergebnis.

Als Regressionsgerade ergibt sich

$$y = 0.3956 \cdot x - 1108,5.$$

Für das Jahr 2010 wäre zu erwarten, dass der Weltrekord beim Diskuswerfen bei 88,656m liegen müsste.

Dieses Ergebnis ist natürlich nicht ernst zu nehmen. Allein der Versuch, die Wurfwerte mit Hilfe einer linearen (also unbeschränkten) Funktion anzunähern, muss scheitern. So würde eine Athletin im Jahr 2060 112,48 m werfen und damit die doppelte Weite einer Sportlerin aus den 60-ern erzielen, auch nach der Perfektionierung der Wurftechnik seit 1920 sind solche großen Fortschritte nicht zu erwarten.

Menschliche Leistungen steigen nicht linear.