Präsenz-Aufgaben 4.

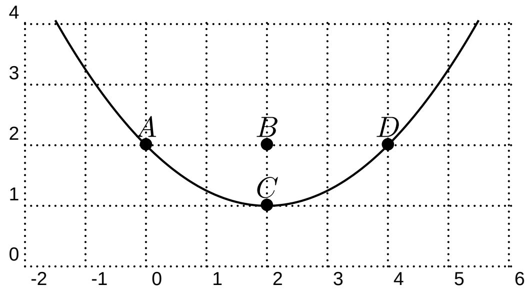
1. *Man bestimme die quadratische Funktion $f(x)$, deren Graph die Parabel ist, die den Brennpunkt $(2,2)$ hat und deren Leitgerade die x-Achse ist.*

Allgemeine Formel für eine quadratische Funktion:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Wähle drei Punkte, die zum Brennpunkt und der Leitgerade den gleichen Abstand haben:

$$A = (0,2), \quad C = (2,1), \quad D = (4,2).$$



Stelle das lineare Gleichungssystem $(f(0) = 2,\ f(2) = 1,\ f(4) = 2)$ auf und löse dieses:

$$\left.\begin{array}{rcl} c &=& 2 \\ 4a + 2b + c &=& 1 \\ 16a + 4b + c &=& 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4},\ b = -1,\ c = 2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 2.$$

Insbesondere kann man für diese Aufgabe den Satz 4.2 aus dem Leitfaden anwenden.

Satz 4.2 *Der Graph der Funktion $f(x) = cx^2$ (für $c \neq 0$) ist die Parabel mit Brennpunkt $\left(0, \frac{1}{4c}\right)$ und Leitgerade $y = -\frac{1}{4}$.*

Also hat $f(x) = cx^2 + \dfrac{1}{4c}$ den Brennpunkt $\left(0, \dfrac{1}{2c}\right)$ und die Leitgerade $y = 0$ (also die x-Achse). Damit hat $f(x) = c\left(x - \dfrac{1}{2c}\right)^2 + \dfrac{1}{4c}$ den Brennpunkt $\left(\dfrac{1}{2c}, \dfrac{1}{2c}\right)$ und die x-Achse als Leitgerade. In unserem Fall $\dfrac{1}{2c} = 2$, also $c = \dfrac{1}{4}$. Somit erhalten wir $f(x) = \dfrac{1}{4}(x-2)^2 + 1 = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 2$.

2. *Ein Reiseunternehmen möchte auch im Winter Fluggäste nach Mallorca locken. Für 368 EUR haben sich nur 180 Leute angemeldet. Das Reiseunternehmen senkt den Preis um 50 EUR und es melden sich weitere 30 Leute. Bei welchem Preis sind die Einnahmen am größten?*

<u>Modell.</u> Beim einem Preis von $368 - 50t$ melden sich $180 + 30t$ Leute an. Die Einnahmen sind dann:

$$g(t) = (368 - 50t)(180 + 30t) = -1500t^2 + 2040t + 66240.$$

Dies ist eine nach unten geöffnete Parabel und die Höhe der maximalen Einnahmen beträgt $g(t_0)$ mit $g'(t_0) = 0$.

$$g'(t) = -3\,000t + 2040 \quad \Rightarrow \quad g'(t_0) = -3\,000t_0 + 2040 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 0,68.$$

Die maximalen Einnahmen sind demnach $g(0,68) = 66\,933,6$ bei einem Preis von $368 - 50 \cdot 0,68 = 334$ EUR.

3. *Ein sich unter dem Einfluss einer konstanten Kraft geradlinig bewegendes Teilchen erfüllt die folgende Bewegungsgleichug $s(t) = a + bt + \frac{1}{2}ct^2$, sie beschreibt die Abhängigkeit des zurückgelegten Wegs s (in Meter) von der Zeit t (in Sekunden). Man bestimme aus folgenden 3 Messungen die Beschleunigung c (in m/sec^2), die Anfangsgeschwindigkeit b (in m/sec) und die Anfangsposition a (in m) des Teilchens:*

$t[sec]$	1	2	3
$s[m]$	10	28	56.

Zu finden sind also $a,\ b,\ c$, so dass $s(1) = 10,\ s(2) = 28$ und $s(3) = 56$ gelten.

$$\left.\begin{array}{rcl} a + b + \frac{1}{2} & = & 10 \\ a + 2b + 2c & = & 28 \\ a + 3b + 4\frac{1}{2}c & = & 56 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = 2,\ b = 3,\ c = 10.$$

4. *Jemand fällt von einer 6 m hohen Mauer auf die Erde.*

(a) *Wie lange ist er unterwegs?*

Gesucht ist also ein t mit $f(t) = a + bt + \frac{1}{2}ct^2 = 6$ ($f(t)$ ist eine Zeit-Weg-Funktion), wobei

- $a = 0$ (die Position zum Zeitpunkt $t = 0$),
- $b = 0$ (die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$),
- $c = 9,81m/s^2$ (die Beschleunigung, die durch die Gravitationskraft entsteht).

$$6 = \frac{1}{2} \cdot 9,81t^2 \ \Rightarrow \ t^2 = \frac{12}{9,81} = 1,22 \ \Rightarrow \ t = 1,106\text{sec}$$

Jemand ist $1,106$ sec unterwegs.

(b) *Welche Windgeschwindigkeit hat er bein Aufteffen?*

Die Ableitung der Zeit-Weg-Funktion (in diesem Fall) $f'(t) = ct$ ist die Geschwindigkeits-Funktion, d.h. $f'(t)$ ist die Geschwindigkeit nach t Sekunden.

$$f'(1,106) = 9,81 \cdot 1,106 = 10,85\ \text{m/sec} = 39\ \text{km/h}.$$

5. *Die Wasserteilchen eines in einem Meter Höhe waagerecht ausströmenden Strahls bewege sich in horizontaler Richtung gemäß einer linearen, in vertikaler Richtung gemäß einer quadratischen Funktion.*

(a) *Bestimme den Ort, an dem das Wasser den waagerechten Boden berührt, falls es mit der Geschwindigkeit* 10 *m/sec ausströmt.*

Die Dauer des vertikalen Fallens von einem Meter Höhe bis zum Boden lässt sich mit der Funktion des freien Falls berechnen: Aus $s(t) = \dfrac{9,81}{2}t = 1\text{m}$ folgt $t = 0,45$ sec.
Strömt das Wasser mit der Geschwindigkeit 10 m/sec aus, legt das Wasser in 0,45 sec eine Entfernung von $10 \cdot 0,45 = 4,5$ m zurück.

(b) *Wie schnell muss es ausströmen, um den Boden im (horizontalen) Abstand von 2 Metern zu treffen?*

Gesucht ist also die Geschwindigkeit v, mit der nach $0,45$ sec der Boden im Abstand von 2 m berührt wird, d.h. $v \cdot 0,45 = 2$. Wir erhalten $v = 4,5$ m/sec.

6. *Jemand übt Hochsprung. Er lässt jeweils messen, wie lange er in de Luft ist. Es wird als Zeit* $1,4$ *sec gemessen.*

(a) *Wie hoch ist er demnach gesprungen?*

Wir bezeichnen mit x die höchste Stelle des Sprunges (die ist zu bestimmen). Die Zeit des Sprungteils vom Boden bis zu x ist gleich der Zeit des Sprungteils von x bis zum Boden, d.h. von der Höhe x erreicht der Sportler im freien Fall den Boden in $\frac{1,4}{2}$ Sekunden. Der freie Fall ist durch die Funktion $f(t) = \frac{9,81}{2} \cdot t^2$ beschrieben (nach t Sekunden ist der Körper $f(t)$ Meter unterhalb der Ursprungsposition). In diesem Fall gilt

$$x = f\left(\frac{1,4}{2}\right) = \frac{9,81}{2} \cdot \left(\frac{1,4}{2}\right)^2 = \approx 2,4 \text{ m}$$

(b) *Mit welcher Endgeschwindigkeit ist er auf dem Boden gelandet?*

Die Funktion $f'(t) = 9,81 \cdot t$ liefert die Geschwindigkeit nach t Sekunden des freien Falles. In diesem Fall ist die Endgeschwindigkeit $f'\left(\dfrac{1,4}{2}\right) = 9,81 \cdot \dfrac{1,4}{2} = 6,867\text{m/s}$.

7. *Jemand springt vom einem* 10*-m-Turm ins Schwimmbecken, dabei springt er zuerst* $1,5$ *m hoch.*

(a) *Wie lange dauert der Sprung insgesamt?*

Zu berechnen ist also die Sprungdauer von dem Turm bis zu der höchste Stelle des Sprunges, d.h. die Dauer t_1 des freien Falls, wenn man $1,5$ m fällt (t_1 erhält man durch die Umformung der Formel $f(t_1) = \frac{9,81}{2} \cdot (t_1)^2 = 1,5$) und die Dauer des freien Falls von der höchsten Stelle des Sprunges bis zum Wasser, d.h. die Dauer des freien Falls für $11,5$ m (t_2 erhält man durch die Umformung der Formel $f(t_2) = \frac{9,81}{2} \cdot (t_2)^2 = 11,5$). Es gilt also

$$t_1 = \sqrt{\frac{1,5 \cdot 2}{9,81}} = 0,553 \text{ sec und } \ t_2 = \sqrt{\frac{11,5 \cdot 2}{9,81}} = 1,5312 \text{ sec.}$$

Der Sprung dauert $t_1 + t_2 = 0,553 + 1,5312 = 2,0842$ sec.

(b) *Welche Anfangsgeschwindigkeit?*

Die Anfangsgeschwindigkeit ist gleich der Geschwindigkeit nach $t_1 = 0,553$ sec, d.h. $f'(0,553) = 9,81 \cdot 0,553 = 5,425$ m/sec.

(c) *Welche Endgeschwindigkeit?*

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_2 = 1,5312$ ist die Endgeschwindigkeit. Es gilt also $f'(1,5312) = 9,81 \cdot 1,5312 = 15,03$ m/sec.