Präsenz-Aufgaben 5.

1.

(a) *Man zeige: Ist* $f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *ein normiertes Polynom von Grad 4, so ist* $g(x) = f\left(x - \frac{1}{4}a_3\right)$ *von der Form* $g(x) = x^4 + b_2x^2 + b_1x + b_0$.

Es gilt $g(x) = \left(x - \frac{1}{4}a_3\right)^4 + a_3\left(x - \frac{1}{4}a_3\right)^3 + a_2\left(x - \frac{1}{4}a_3\right)^2 + a_1\left(x - \frac{1}{4}a_3\right) + a_0.$

Man wende die Binomische Formel an:

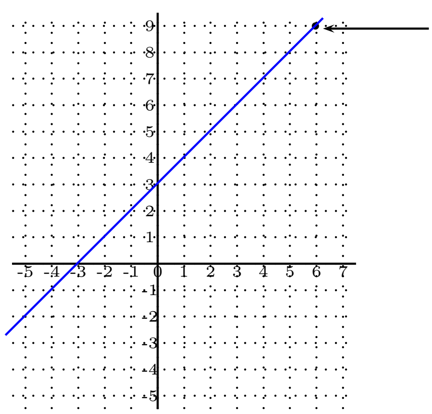
$$\begin{aligned} g(x) &= x^4 - a_3x^3 + \frac{3}{8}a_3^2x^2 - \frac{1}{16}a_3^3x + \frac{1}{256}a_3^4 + a_3x^3 - \frac{3}{4}a_3^2x^2 \\ &\quad + \frac{3}{16}a_3^3x - \frac{1}{64}a_3^4 + a_2x^2 - \frac{1}{2}a_2a_3x + \frac{1}{16}a_2a_3^2 + a_1x - \frac{1}{4}a_1a_3 + a_0 \\ &= x^4 + \underbrace{\left(a_2 - \frac{3}{8}a_3^2\right)}_{=b_2} x^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{8}a_3^3 - \frac{1}{2}a_2a_3 + a_1\right)}_{=b_1} x + \underbrace{\frac{1}{16}a_2a_3^2 - \frac{3}{256}a_3^4 - \frac{1}{4}a_1a_3 + a_0}_{=b_0} \end{aligned}$$

(b) *Sei* $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ *ein normiertes Polynom vom Grad* n. *Wie ist* $c \in \mathbb{R}$ *zu wählen, damit das Polynom* $g(x) = f(x-c)$ *die Form* $g(x) = x^n + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0$ *hat (dass also der zweithöchste Koeffizient verschwindet)?*

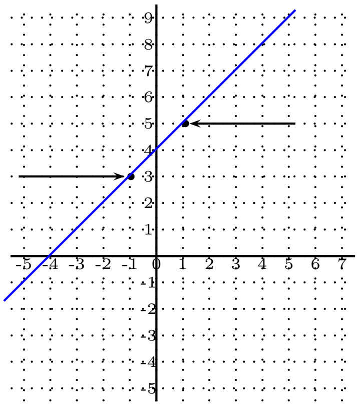
Bezüglich des Aufgabenteils (a) verschwindet der zweitghöchste Koeffizient in $g(x)$, wenn $c = \frac{1}{n}a_{n-1}$, d.h. $g(x) = f\left(x - \frac{1}{n}a_{n-1}\right)$

2. *Zeichnen Sie den Graphen der Funktionen* $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 18}{x - 6}$ *und* $g(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x^2 - 1}$ *Erklären Sie, was hier geschieht.*

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind rationale Funktionen, d.h. von der Form $\dfrac{h(x)}{k(x)}$, wobei $h(x)$ und $k(x)$ Polynomen sind. Da 6 die einzige Nullstelle des Nenners von f ist, gilt für den Definitionsbereich von f : $D_f = \mathbb{R}\backslash\{6\}$. Somit ist 6 eine Singularität der Funktion $f(x)$. Aus $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 18}{x - 6} = \dfrac{(x-6)(x+3)}{x-6}$ folgt, dass 6 eine hebbare Singularität ist.



Die Nullstellen des Nenners von g sind 1 und -1, damit gilt für den Definitionsbereich von $g: \quad D_f = \mathbb{R}\backslash\{1,-1\}$. Somit sind 1 und -1 die Singularitäten der Funktion $g(x)$. Aus $f(x) = \dfrac{x^3+4x^2-x-4}{x^2-1} = \dfrac{(x^2-1)(x+4)}{x^2-1}$ folgt, dass 1 und -1 die hebbaren Singularitäten sind.



3. *Sei $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die x-Koordinate des Wendepunkts $x_0 = -\frac{1}{3}a_2$ ist. Berechnen Sie die Tangentensteigung im Wendepunkt.*

Die Steigung der Tangente im Wendepunkt $x_0 = -\dfrac{1}{3}a_2$ ist $f'\left(-\dfrac{1}{3}a_2\right)$.

$$f'(x) = 3x^2+2a_2x+a_1 \quad\Rightarrow\quad f'\left(-\frac{1}{3}a_2\right) = 3\left(-\frac{1}{3}a_2\right)^2+2a_2\left(-\frac{1}{3}a_2\right)+a_1 = -\frac{1}{3}a_2^2+a_1.$$

4. *Teilen Sie die gegebenen Polynome $f(x)$ durch $g(x)$ mit dem Rest:*

$$\begin{array}{l}
x^3+x^2+x+1 = \left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\\
\underline{-x^3-x^2}\\
\qquad\quad x+1\\
\qquad\ \ \underline{-x-1}\\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x^3\ +x^2\ +x+1 = \left(x+2\right)\left(x^2-x+3\right)-5\\
\underline{-x^3-2x^2}\\
\quad -x^2\ +x\\
\quad \underline{\ \ x^2+2x}\\
\qquad\quad 3x+1\\
\qquad \underline{-3x-6}\\
\qquad\qquad -5
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rrrr}
x^4 & +\,2x^2 & +\,1 & = \left(x^2-1\right)\left(x^2+3\right)\;+4 \\
-\,x^4 & +\,x^2 & & \\
\cline{1-2}
 & 3x^2 & +\,1 & \\
 & -\,3x^2 & +\,3 & \\
\cline{2-3}
 & & 4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
x^8 & +\,5x^7 & & & & & +\,3x^2 & & +\,1 & = \left(x^3+2x+1\right)\left(x^5+5x^4-2x^3-11x^2-x+24\right)+16x^2-47x-23 \\
-\,x^8 & & -\,2x^6 & -\,x^5 & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & 5x^7 & -\,2x^6 & -\,x^5 & & & & & & \\
 & -\,5x^7 & & -\,10x^5 & -\,5x^4 & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & -\,2x^6 & -\,11x^5 & -\,5x^4 & & & & & \\
 & & 2x^6 & & +\,4x^4 & +\,2x^3 & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & -\,11x^5 & -\,x^4 & +\,2x^3 & +\,3x^2 & & & \\
 & & & 11x^5 & & +\,22x^3 & +\,11x^2 & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & -\,x^4 & +\,24x^3 & +\,14x^2 & & & \\
 & & & & x^4 & & +\,2x^2 & +\,x & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & 24x^3 & +\,16x^2 & +\,x & +\,1 & \\
 & & & & & -\,24x^3 & & -\,48x & -\,24 & \\
\cline{6-9}
 & & & & & & 16x^2 & -\,47x & -\,23 &
\end{array}
$$