Präsenz-Aufgaben 6.

1. Ein weiterer Klassiker. *Falten von Papier. Gegeben sei ein großes Blatt Papier mit Dicke* 0.1 *mm. Das Papier soll nun mehrfach gefaltet werden, dabei entsteht ein immer höherer Turm aus Papier. Wie oft muss man falten, um einen Turm zu erhalten, der bis zum Mond reicht? (Abstand Erde-Mond* 384 000 *km)*

Faltet man das Papier ein-Mal, so entsteht die doppelte Dicke, d.h. $0.1 \cdot 2 = 0.2$ mm, faltet man es zwei Mal, so entsteht dabei $0.1 \cdot 2^2 = 0.4$ mm dicker Stapel usw. faltet man also m-Mal, so entsteht ein $0.1 \cdot 2^m$ mm dicker Stapel. Gesucht wird also die kleinste natürliche Zahl n, so dass $0.1 \cdot 2^n \geq 384\,000\,000\,000$.

$$\begin{aligned}
0.1 \cdot 2^n &= 384\,000\,000\,000 \\
&\Updownarrow \\
2^n &= 384\,000\,000\,000 \cdot 10 = 3.84 \cdot 10^{12} \\
&\Updownarrow \\
\ln(2^n) &= \ln(3.84 \cdot 10^{12}) \\
&\Updownarrow \\
n \cdot \ln(2) &= \ln(3.84 \cdot 10^{12}) \\
&\Updownarrow \\
n &= \frac{\ln(3.84 \cdot 10^{12})}{\ln(2)} \\
&\Updownarrow \\
n &= 41.80467...
\end{aligned}$$

Das Blatt muss also 42-mal gefalltet werden.

2. Homöopathie. *Oft wird gesagt, dass man um D(n+1) zu erhalten im Verhältnis 1:10 mischt. Dann wäre aber nur* 1/11 *D(n) in D(n+1). Man bestimme t mit* $(1/11)^t < (1/10)^{t+1}$.

D(n+1) = 1 Teil D(n) + 10 Teile Wasser
D(n+1) = $\frac{1}{11}$ D(n)+$\frac{10}{11}$ Wasser.

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{11}\right)^t &< \left(\tfrac{1}{10}\right)^{t+1} = \left(\tfrac{1}{10}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{10}\right)^t \\
&\Updownarrow \\
10^t \cdot \left(\tfrac{1}{11}\right)^t &< \tfrac{1}{10} \\
&\Updownarrow \\
\left(\tfrac{10}{11}\right)^t &< \tfrac{1}{10} \\
&\Updownarrow \\
\lg\left(\tfrac{10}{11}\right)^t &< \lg\left(\tfrac{1}{10}\right) \\
&\Updownarrow \\
t \cdot \underbrace{\lg\left(\frac{10}{11}\right)}_{=-0.04139...} &< \underbrace{\lg\left(\frac{1}{10}\right)}_{=-1} \\
&\Updownarrow \\
t &> \tfrac{-1}{-0.04139...} = 24.1604...
\end{aligned}$$

3. *Nach Angaben des Statistischen Bundesamts lebten im Jahr 1973 in der Bundesrepublik* 61 976 000 *Menschen, 1974 waren es* 62 054 000 *Menschen. Unter der Annahme von exponentiellem Wachstum soll aus diesen Daten die Anzahl für die Jahre* 2000 *und* 2010 *prognostiziert werden. (Und bitte: kommentieren Sie das Ergebnis.)*

Eine Exponentialfunktion $f(t) = c \cdot e^{\lambda \cdot t}$ ist durch die Parameter c und λ festgelegt. Aus der gegebenen Daten sollen nun c und λ bestimmt werden.

$$f(1973) = c \cdot e^{\lambda \cdot 1973} = 61\,976\,000 \tag{1}$$

$$f(1974) = c \cdot e^{\lambda \cdot 1974} = 62\,054\,000 \tag{2}$$

Teile (2) durch (1):

$$\begin{aligned}
\frac{c \cdot e^{\lambda \cdot 1974}}{c \cdot e^{\lambda \cdot 1973}} &= \frac{62\,054\,000}{61\,976\,000} \\
&\Updownarrow \\
e^{\lambda \cdot 1974} \cdot e^{-\lambda \cdot 1973} &= \frac{62\,054\,000}{61\,976\,000} \\
&\Updownarrow \\
e^{\lambda \cdot (1974-1973)} &= \frac{62\,054\,000}{61\,976\,000} \\
&\Updownarrow \\
\ln\left(e^{\lambda}\right) &= \ln\left(\frac{62\,054\,000}{61\,976\,000}\right) \\
&\Updownarrow \\
\lambda \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} &= \ln\left(\frac{62\,054\,000}{61\,976\,000}\right) \\
&\Updownarrow \\
\lambda &= 0.00125776
\end{aligned}$$

Setze λ in (1) ein:

$$\begin{aligned}
c \cdot e^{\lambda \cdot 1973} &= 61\,976\,000 \\
&\Updownarrow \\
c &= \frac{61\,976\,000}{e^{\lambda \cdot 1973}} \\
&\Updownarrow \\
c &= 5\,181\,973.532
\end{aligned}$$

Die Wachstumsfunktion ist $f(t) = 5\,181\,973.532 \cdot e^{0.00125776 \cdot t}$.

Für das Jahr 2000 ergibt sich:

$$f(2000) = 5\,181\,973.532 \cdot e^{0.00125776 \cdot 2000} = 64\,116\,771.43$$

Für das Jahr 2010 ergibt sich:

$$f(2010) = 5\,181\,973.532 \cdot e^{0.00125776 \cdot 2010} = 64\,928\,299.37$$

Komentar: Das Ergebnis ist nicht realistisch, denn die jetzige Einwohnerzahl ist deutlich höher. Im Jahre 2006 lag sie bei 82 310 000.
Im Jahr 1973 wurde unter 'Bundesrepublik' etwas anderes verstanden als im Jahr 2000.

4. *Der Weiße Nil wurde oberhalb des Staudamms von Jebel Aulia durch ein Unkraut, die Wasserhyazinthe, überwachsen. 1958 bedeckte die Pflanze nur 12 km^2, aber der jährliche Zuwachs betrug 50%. Wie lange dauerte es, bis die ganze Fläche des Stausees von 200 km^2 bedeckt war?*

Die allgemeine Formel ist $K(x) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$. In diesem Fall der Anfangswert ist $K_0 = 12$, Prozentsatz $p = 50$. Nach x Jahren wird $K(x) = 12 \cdot 1.5^x$ km^2 Fläche des Stausees bedeckt. Gesucht ist also die kleinste natürliche Zahl x, so dass $K(x) \geq 200$.

$$\begin{aligned}
12 \cdot 1.5^x &= 200 \\
&\Updownarrow \\
1.5^x &= \frac{200}{12} \\
&\Updownarrow \\
\lg\left(1.5^x\right) &= \lg\left(\frac{200}{12}\right) \\
&\Updownarrow \\
x &= \frac{\lg\left(\frac{200}{12}\right)}{\lg(1.5)} \\
&\Updownarrow \\
x &= 6.939...
\end{aligned}$$

Es dauerte 7 Jahre bis der Stausee bedeckt war.

Präsenz-Aufgaben 6-2.

I. Exponentialfnktionen $y = a \cdot \exp(b \cdot x)$.

Linke Grafik.

$$5 = a \cdot \exp(b \cdot 9) \tag{1}$$

$$10 = a \cdot \exp(b \cdot 10) \tag{2}$$

Teile (2) durch (1):

$$\begin{aligned} \frac{10}{5} &= \frac{a \cdot \exp(10 \cdot b)}{a \cdot \exp(9 \cdot b)} \\ &\Updownarrow \\ 2 &= \exp(10 \cdot b) \cdot \exp(-9 \cdot b) = \exp((10-9) \cdot b) \\ &\Updownarrow \\ \ln(2) &= \ln(\exp(b)) = b \end{aligned}$$

Setze b in (1) ein:

$$\begin{aligned} 5 &= a \cdot \exp(\ln(2) \cdot 9) = a \cdot \underbrace{\exp\left(\ln(2)^9\right)}_{=2^9} \\ &\Updownarrow \\ a &= \frac{5}{2^9} = \frac{5}{512} \end{aligned}$$

Es gilt also $y = \frac{5}{512} \cdot \exp(\ln(2) \cdot x) = \frac{5}{512} \cdot 2^x$.

Rechte Grafik.

$$10^3 = a \cdot \exp(b \cdot 0) = a \tag{1}$$

$$10 = a \cdot \exp(2.5 \cdot b) \tag{2}$$

Setze a in (2) ein:

$$\begin{aligned} 10 &= 10^3 \cdot \exp(2.5 \cdot b) \\ &\Updownarrow \\ \ln\left(\frac{10}{10^3}\right) &= \ln(\exp(2.5 \cdot b)) \\ &\Updownarrow \\ \ln(10^{-2}) &= 2.5 \cdot b \\ &\Updownarrow \\ b &= \frac{\ln(10^{-2})}{2.5} = -1.842... \end{aligned}$$

Es gilt also $y = 10^3 \cdot \exp(-1.842 \cdot x)$.

II. Logaritmische Funktionen $\quad y = a + b \cdot \lg(x)$

Linke Grafik.

$0 = a + b \cdot \lg(10^{-2})$ (1)

$5 = a + b \cdot \underbrace{\lg(1)}_{=0} = a$ (2)

Setze a in (1) ein:

$$\begin{aligned} 0 &= 5 + b \cdot \underbrace{\lg\left(10^{-2}\right)}_{=-2} \\ &\Updownarrow \\ b &= \frac{-5}{-2} = 2.5 \end{aligned}$$

Es gilt also $y = 5 + 2.5 \cdot \lg(x)$.

Rechte Grafik.

$7 = a + b \cdot \lg(0.1)$ (1)

$5 = a + b \cdot \underbrace{\lg(1)}_{=0} = a$ (2)

Setze a in (1) ein:

$$\begin{aligned} 7 &= 5 + b \cdot \underbrace{\lg\left(0.1\right)}_{=-1} \\ &\Updownarrow \\ b &= \frac{7-5}{-1} = -2 \end{aligned}$$

Es gilt also $y = 5 - 2 \cdot \lg(x)$.

III. Potenzfunktionen $\quad y = a \cdot x^b$

Linke Grafik.

$0.1 = a \cdot 0.1^b$ (1)

$0.4 = a \cdot 0.6^b$ (2)

Teile (2) durch (1)

$$
\begin{aligned}
\frac{0.4}{0.1} &= \frac{a \cdot 0.6^b}{a \cdot 0.1^b} \\
&\Updownarrow \\
4 &= 6^b \\
&\Updownarrow \\
\lg(4) &= \lg(6^b) \\
&\Updownarrow \\
b &= \frac{\lg(4)}{\lg(6)} = 0.7737...
\end{aligned}
$$

Setze b in (1) ein:

$$0.1 = a \cdot 0.1^{0.7737} \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.593881...$$

Es gilt $y = 0.593881 \cdot x^{0.7737}$.

<u>Rechte Grafik.</u>

$3 = a \cdot (10^2)^b$ (1)

$1 = a \cdot (10^3)^b$ (2)

Teile (2) durch (1)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= \frac{a \cdot (10^3)^b}{a \cdot (10^2)^b} \\
&\Updownarrow \\
\frac{1}{3} &= 10^b \\
&\Updownarrow \\
\lg\left(\frac{1}{3}\right) &= \lg(10^b) \\
&\Updownarrow \\
b &= \lg\left(\frac{1}{3}\right) = -0.47712...
\end{aligned}
$$

Setze b in (1) ein:

$$3 = a \cdot (10^2)^{-0.47712} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{3}{100^{-0.47712}} = 26.99984...$$

Es gilt $y = 26.99984 \cdot x^{-0.47712}$.