Präsenz-Aufgaben 7.

2. *Die Wechselspannung $U[V]$ habe den zeitlichen Velauf*

$$U = f(t) = 500\ V + 300\ KV \sin\left(2\pi \cdot 100\ KHz \cdot t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Eine Periode des Verlaufs von U soll symmetrisch zur Spannungsachse im Sichtfeld des Oszillographen ($-1\,\mathrm{sec} \leq t \leq 1\,\mathrm{sec}$, $-1\,V \leq u \leq 1\,V$) in voller Größe dargestellt werden, und zwar vermöge einer durch $u(t) = a \cdot f(c \cdot t + d) + b$ definierten Funktion $u(t)$.

Die Wechselspannung, ausgedruckt in V und Hz ist

$$f(t) = 500 + 300\,000 \cdot \sin\left(2\pi \cdot 100\,000 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$$

I. 'Verschiebe' die Funktion f vertikal um 500 nach unten:

$$f_1(t) = f(t) - 500 = 300\,000 \cdot \sin\left(2\pi \cdot 100\,000 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Es gilt nun $|\max\{f_1(t) \mid t \in \mathbb{R}\}| = |\min\{f_1(t) \mid t \in \mathbb{R}\}| = 300\,000$.

II. 'Stauche' die Funktion f_1 um $\frac{1}{300\,000}$:

$$f_2(t) = \frac{1}{300\,000} \cdot f_1(t) = \sin\left(2\pi \cdot 100\,000 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Es gilt nun $|\max\{f_2(t) \mid t \in \mathbb{R}\}| = |\min\{f_2(t) \mid t \in \mathbb{R}\}| = 1$.

III. Berechne die Extremstellen von f_2, d.h. solche $t \in \mathbb{R}$, so dass

$$f_2'(t) = \cos\left(2\pi \cdot 100\,000 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot (2\pi \cdot 100\,000) = 0$$

$$\begin{array}{rcl}
f_2'(t) & = & 0 \\
& \Updownarrow & \\
\cos\left(2\pi \cdot 100\,000 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) & = & 0 \\
& \Updownarrow & \\
2\pi \cdot 100\,000 \cdot t + \frac{\pi}{3} & = & \frac{\pi}{2} + z\pi, \quad z \in \mathbb{Z}, \\
& \Updownarrow & \\
t & = & \frac{\pi}{6 \cdot 2\pi \cdot 100\,000} + \frac{z}{200\,000}, \quad z \in \mathbb{Z}, \\
& \Updownarrow & \\
t & = & \frac{1}{1\,200\,000} + \frac{z}{200\,000}, \quad z \in \mathbb{Z},
\end{array}$$

Für die Extremstellen

$$t_0 = \frac{1}{1\,200\,000}, \quad t_{-1} = \frac{1}{1\,200\,000} + \frac{-1}{200\,000}, \quad t_1 = \frac{1}{1\,200\,000} + \frac{1}{200\,000}$$

gilt: Da $f_2(t_0) = 1$, ist t_0 ein lokales Maximum, die Nachbar-Extemstellen t_{-1} und t_1 sind lokale Minima, d.h. $f_2(t_1) = f_2(t_{-1}) = -1$. Eine Periode des Graphen von f_2 verläuft von t_{-1} bis t_1.

'Verschiebe' die Funktion f_2 horizontal so, dass der Extrempunkt $t_0 = \frac{1}{1\,200\,000}$ auf der y-Achse liegt. Dadurch wird der Graph der so entstandenen Funktion symmetrisch zur y-Ache.

$$f_3(t) = f_2\left(t + \frac{1}{1\,200\,000}\right) = \sin\left(2\pi \cdot 100\,000 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Die lokalen Minima von f_3 liegen somit bei $-\frac{1}{1\,200\,000}$ und $\frac{1}{1\,200\,000}$.

IV. 'Strecke' die Funktion f_3 horizontal so, dass die lokalen Minima bei -1 und 1 liegen:

$$f_4(t) = f_3\left(\frac{1}{200\,000} \cdot t\right) = \sin\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Die Funktion f_4 ist somit die gesuchte Funktion u. Es gilt:

$$\begin{aligned}
u(t) &= f_3\left(\frac{1}{200\,000} \cdot t\right) \\
&= f_2\left(\frac{1}{200\,000} \cdot t + \frac{1}{1\,200\,000}\right) \\
&= \frac{1}{300\,000} \cdot f_1\left(\frac{1}{200\,000} \cdot t + \frac{1}{1\,200\,000}\right) \\
&= \frac{1}{300\,000}\left(\cdot f_1\left(\frac{1}{200\,000} \cdot t + \frac{1}{1\,200\,000}\right) - 500\right) \\
&= \frac{1}{300\,000} \cdot f\left(\frac{1}{200\,000} \cdot t + \frac{1}{1\,200\,000}\right) - \frac{1}{600}
\end{aligned}$$

Es gilt somit:

$$a = \frac{1}{300\,000}, \quad c = \frac{1}{200\,000}, \quad d = \frac{1}{1\,200\,000}, \quad b = -\frac{1}{600}.$$

3. *Für den Druck in Höhe h gilt (ungefähr):* $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{8}}$, *dabei ist h die Höhe über NN, gemessen in km, der Druck wird jeweils in* Nm^{-2} *gemessen. Für den Druck auf Meereshöhe* p_0 *gilt* $p_0 = 1,01325 \cdot 10^5$ Nm^{-2}.

(a) *Mit Hilfe dieser Formel berechne man den Druck auf dem Mount-Everest-Gipfel (Höhe etwa 8,9 km) und vergleiche ihn mit dem in Meereshöhe.*

Der Druck auf dem Mount-Everest-Gipfel ist

$$p(8,9) = 1,01325 \cdot 10^5 \cdot e^{-\frac{8,9}{8}} = 1,01325 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{e^{\frac{8,9}{8}}} = 33\,309,18 ... \mathrm{Nm}^{-2}$$

Es gilt $\dfrac{p_0}{p(8,9)} = 3.041953...$, d.h. der Druck in Meereshöhe ist etwa drei Mal größer als auf dem Mount-Everest-Gipfel.

(b) *Zeige, dass für die Unkehrfunktion $h(x)$ gilt: $h(x) = 8 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{x}\right)$ für $x > 0$, hier ist nun x der gemessene Luftdruck und $h(x)$ die zugehörige Höhe.*

Für den Luftdruck $x > 0$ und die zugehörige Höhe $h(x)$ gilt:

$$\begin{array}{rcl}
x & = & p_0 \cdot e^{-\frac{h(x)}{8}} \\
& \Updownarrow & \\
\dfrac{x}{p_0} & = & e^{-\frac{h(x)}{8}} \\
& \Updownarrow & \\
\ln\left(\dfrac{x}{p_0}\right) & = & \ln\left(e^{-\frac{h(x)}{8}}\right) \\
& \Updownarrow & \\
\ln\left(\dfrac{x}{p_0}\right) & = & -\dfrac{h(x)}{8} \\
& \Updownarrow & \\
h(x) & = & -8 \cdot \ln\left(\dfrac{x}{p_0}\right) \\
& \Updownarrow & \\
h(x) & = & -8 \cdot \ln\left(\left(\dfrac{p_0}{x}\right)^{-1}\right) \\
& \Updownarrow & \\
h(x) & = & 8 \cdot \ln\left(\dfrac{p_0}{x}\right)
\end{array}$$

4. *Berechne* $\log_2(\log_2 256)$ *und* $\log_{10}(\log_{10} 10\,000\,000\,000)$.

Der Ausdruck $\log_a b = c$ ist gleichbedeutend $a^c = b$. Damit gilt $\log_a a^c = c$. Da $256 = 2^8$, $8 = 2^3$ und $10^{10} = 10\,000\,000\,000$, $10 = 10^1$ erhalten wir:

$$\log_2(\log_2 256) = \log_2(\log_2 2^8) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

und

$$\log_{10}(\log_{10} 10\,000\,000\,000) = \log_{10}(\log_{10} 10^{10}) = \log_{10} 10 = 1$$