Präsenz-Aufgaben 9.

1. *Man zeige mit vollständiger Induktion:*

(a) $\sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$

i) Induktionsanfang. Sei $n = 1$, dann $\sum_{t=1}^{1} t^2 = 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 1.$

ii) Induktionsvoraussetzung: Sei $\sum_{t=1}^{n} t^2 = 1^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, bereits bewiesen.

iii) Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n+1} t^2 &= \sum_{t=1}^{n} t^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\underbrace{\left(2n^2 + 7n + 6\right)}_{=(n+2)(2n+3)} \\
&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)
\end{aligned}
$$

(b) $\sum_{t=1}^{n} (2t-1) = n^2.$

i) Induktionsanfang. Sei $n = 1$, dann $\sum_{t=1}^{1} (2 \cdot 1 - 1) = 1^2 = 1.$

ii) Induktionsvoraussetzung: Sei $\sum_{t=1}^{n} (2t-1) = n^2$, bereits bewiesen.

iii) Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n+1} (2t-1) &= \sum_{t=1}^{n} (2t-1) + (2(n+1)-1) \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2.
\end{aligned}
$$

2. *Man beweise, dass die reellen Zahlen $\sqrt{10}, \sqrt{17}, \sqrt{18}$ nicht rational sind.*

Zu $\sqrt{10}$. Angenommen $\sqrt{10}$ sei rational, dann gibt es $a, b \in \mathbb{N}$, so dass der größte gemeinsame Teiler von a und b 1 ist und $\sqrt{10} = \frac{a}{b}$. Daraus erhalten wir die Implikationskette

$$10 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$\Downarrow$$
$$b^2 = \frac{a^2}{10} = \frac{a^2}{2 \cdot 5}$$
$$\Downarrow$$
$$2 \text{ und } 5 \text{ teilen } a^2$$
$$\Downarrow$$
$$2 \text{ und } 5 \text{ teilen } a$$
$$\Downarrow$$
$$a = 2 \cdot 5 \cdot x = 10 \cdot x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}$$
$$\Downarrow$$
$$b^2 = \frac{(10 \cdot x)^2}{10} = 10 \cdot x^2$$
$$\Downarrow$$
$$10 \text{ ist ein Teiler von } a \text{ und } b.$$

Dies ist ein Widerspruch zu "der größte gemeinsame Teiler von a und b 1 ist". Die Annahme ist also falsch und damit ist $\sqrt{10}$ nicht rational.

Zu $\sqrt{17}$. Angenommen $\sqrt{17}$ sei rational, dann gibt es $a, b \in \mathbb{N}$, so dass der größte gemeinsame Teiler von a und b 1 ist und $\sqrt{17} = \frac{a}{b}$. Daraus erhalten wir die Implikationskette

$$17 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$\Downarrow$$
$$b^2 = \frac{a^2}{17}$$
$$\Downarrow$$
$$17 \text{ teilt } a^2$$
$$\Downarrow$$
$$17 \text{ teilt } a$$
$$\Downarrow$$
$$a = 17 \cdot x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}$$
$$\Downarrow$$
$$b^2 = \frac{(17 \cdot x)^2}{17} = 17 \cdot x^2$$
$$\Downarrow$$
$$17 \text{ ist ein Teiler von } a \text{ und } b.$$

Dies ist ein Widerspruch zu "der größte gemeinsame Teiler von a und b 1 ist". Die Annahme ist also falsch und damit ist $\sqrt{17}$ nicht rational.

Zu $\sqrt{18}$. Es gilt $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Wenn $\sqrt{18}$ rational ist, dann ist $\sqrt{2}$ auch rational. Wir zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.
Angenommen, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{N}$, so dass der größte gemeinsame Teiler von a und b 1 ist und $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Daraus erhalten wir die Implikationskette

$$\begin{gathered} 2 = \frac{a^2}{b^2} \\ \Downarrow \\ b^2 = \frac{a^2}{2} \\ \Downarrow \\ 2 \text{ teilt } a^2 \\ \Downarrow \\ 2 \text{ teilt } a \\ \Downarrow \\ a = 2 \cdot x \text{ für ein } x \in \mathbb{N} \\ \Downarrow \\ b^2 = \frac{(2 \cdot x)^2}{2} = 2 \cdot x^2 \\ \Downarrow \\ 2 \text{ ist ein Teiler von } a \text{ und } b. \end{gathered}$$

Dies ist ein Widerspruch zu "der größte gemeinsame Teiler von a und b 1 ist". Die Annahme ist also falsch und damit sind $\sqrt{2}$ und $\sqrt{18}$ nicht rational.

3. *Man verwende Heron-Verfahren, um $\sqrt{10}, \sqrt{17}, \sqrt{18}$ auf 10 Stellen genau zu berechnen.*

Zu $\sqrt{10}$. Es gilt $\sqrt{10} < 5$. Setze $x_1 = 5$, dann $y_1 = \frac{10}{5} = 2$. Die Folgen $x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ bzw. $y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ seien durch $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$ bzw. $y_n = \frac{10}{x_n}$ rekursiv definiert:

n	x_n	y_n
1	5,000 000 000 000 000	2,000 000 000 000 000
2	3,500 000 000 000 000	2,857 142 857 142 856
3	3.178 571 428 571 428	3.146 067 415 730 336
4	3.162 319 422 150 882	3.162 235 898 737 399
5	3.162 277 660 444 136	3.162 277 659 892 622
6	3.162 277 660 168 379	3.162 277 660 168 379 5

Nach 6 Schritten erhält man also $\sqrt{10} = 3.162\,277\,660\ldots$

Zu $\sqrt{17}$. Es gilt $\sqrt{17} < 5$. Setze $x_1 = 5$, dann $y_1 = \frac{17}{5} = 3.4$. Die Folgen $x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ bzw. $y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ seien durch $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$ bzw. $y_n = \frac{17}{x_n}$ rekursiv definiert:

n	x_n	y_n
1	5,000 000 000 000 000	3,400 000 000 000 000
2	4,200 000 000 000 000	4.0476190476190474
3	4.123 809 523 809 523	4.122 401 847 575 058
4	4.123 105 685 692 291	4.123 105 565 543 031
5	4.123 105 625 617 661 5	4.123 105 625 617 66

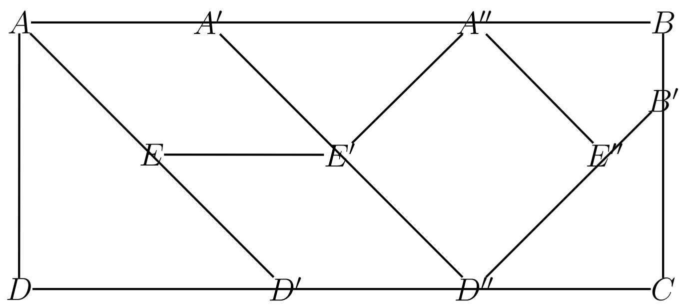
Nach 5 Schritten erhält man also $\sqrt{17} = 4.123\,105\,625\ldots$

Zu $\sqrt{18}$. Es gilt $\sqrt{18} < 5$. Setze $x_1 = 5$, dann $y_1 = \frac{18}{5} = 3.6$. Die Folgen $x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ bzw. $y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ seien durch $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$ bzw. $y_n = \frac{18}{x_n}$ rekursiv definiert:

n	x_n	y_n
1	5,000 000 000 000 000	3,600 000 000 000 000
2	4,300 000 000 000 000	4.186046511627907
3	4.243 023 255 813 954	4.242 258 152 918 607
4	4.242 640 704 366 281	4.242 640 669 872 29
5	4.242 640 687 119 286	4.242 640 687 119 285

Nach 5 Schritten erhält man also $\sqrt{18} = 4.242\,640\,687\ldots$

5. *Grand Tan.* *Gegeben sei folgendes tangram-artige Puzzle:*



Es gilt $|A, A'| = |A'', B| = |B', C| = |D', D''| = |D'', C| = |E, E'| = |A', E'| = |E', A''| = |E', D''| = |D'', E''| = |A, E| = |E, D'| = |A'', E''| = a$.

Lässt sich aus diesen Flächen ein Quadrat legen?

$$\begin{aligned}
|D'', C| = |B', C| = a \text{ und } \angle(D'', C, B') = 90^\circ \quad &\Rightarrow \quad \angle(B', D'', C) = \angle(D'', B', C) = 45^\circ \text{ und } |D'', B'| = a\sqrt{2} \\
|D'', B'| = a\sqrt{2} \text{ und } |D'', E''| = a \quad &\Rightarrow \quad |E'', B'| = a(\sqrt{2} - 1) \\
|A'', B| = |D'', C| \quad &\Rightarrow \quad \angle(A'', D'', C) = \angle(A'', D'', D') = 90^\circ \\
&\Downarrow
\end{aligned}$$

$$\angle(A', D'', D') = 45^\circ$$

$$\begin{array}{rcl}
|A,A'| = |D',D''| & \Rightarrow & \angle(A',D'',D') = \angle(A,D',D) = 45^\circ \\
\angle(A,D',D) = 45^\circ \text{ und } \angle(A,D,D') = 90^\circ & \Rightarrow & \angle(D,A,D') = 45^\circ \text{ und } |A,D| = |D,D'| \\
|A,D| = |D,D'|,\ \angle(A,D,D') = 90^\circ \text{ und } |A,D'| = 2a & \Rightarrow & |A,D| = |D,D'| = a\sqrt{2} \\
|A,D| = |B,C| = a\sqrt{2} \text{ und } |B',C| = a & \Rightarrow & |B,B'| = a(\sqrt{2}-1) \\
|A,D| = a\sqrt{2} \text{ und } |D,C| = a(\sqrt{2}+2) = a\sqrt{2}(1+\sqrt{2}) & \Rightarrow & \text{Fläche}(A,B,C,D) = 2a^2(1+\sqrt{2})
\end{array}$$

Angenommen, aus diesen Flächen lässt sich ein Quadrat legen und die Länge einer (und damit jeder) Kante dieses Quadrates ist gleich x. Dann ist x eine Summe aus gewissen in dem Puzzle vorhandenen Kanten-Längen. Ausserdem ist die Fläche dieses Quadrates gleich $x^2 = 2a^2(1+\sqrt{2})$ und damit $x = \sqrt{2a^2(1+\sqrt{2})} = a\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Die Länge jeder in dem Puzzle vorhandenen Kante ist $\alpha + \beta\sqrt{2}$ für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Somit hat auch x diese Form. Dies ist nur dann möglich, wenn $\sqrt{1+\sqrt{2}} = \alpha + \beta\sqrt{2}$ für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Daraus aber würde folgen:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{1+\sqrt{2}} & = & \alpha + \beta\sqrt{2} \\
1+\sqrt{2} & = & \left(\alpha + \beta\sqrt{2}\right)^2 \\
1+\sqrt{2} & = & \alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{2} \\
 & \Downarrow & \\
1 = \alpha^2 + 2\beta^2 & \text{und} & 1 = 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\beta} \\
 & \Downarrow & \\
1 & = & \frac{1}{4\beta^2} + 2\beta^2 \\
 & \Downarrow & \\
\frac{1}{4} & = & \beta^2(1 - 2\beta^2).
\end{array}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\beta \in \mathbb{Z}$.
Aus diesen Flächen lässt sich also kein Quadrat legen.