

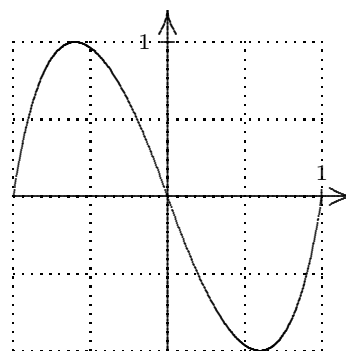
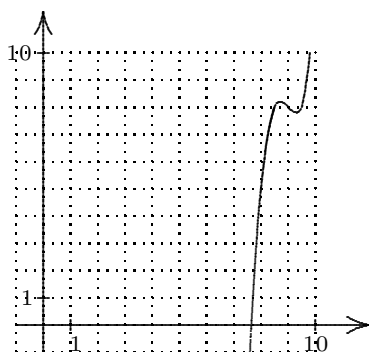
1. Wir suchen Polynome $f(x)$, die an den Stellen $x = -1$, $x = 0$, $x = +1$ (und nur dort) Nullstellen besitzen. Durch diese Nullstellen wird die x -Achse in 4 Abschnitte eingeteilt: in jedem dieser Abschnitte kann f positiv oder negativ sein: insgesamt gibt es $2^4 = 16$ Möglichkeiten. Gesucht ist für jede dieser Möglichkeiten ein Polynom.

Hinweis: Die Polynome brauchen **nicht** in Normalform angegeben werden.

2. Skalierung. Der Graph der Funktion

$$f(x) = 4x^3 - 108x^2 + 971x - 2899$$

hat ungefähr das Aussehen wie im linken Bild:



Man bestimme a, b, c, d , so daß die Funktion

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$$

den rechts dargestellten Graphen hat. Wie lassen sich die Konstanten a, b, c, d interpretieren?

3. Sei $f(x)$ ein Polynom mit einer Nullstelle a der Vielfachheit m . Zeige: Genau dann besitzt $f(x)$ in a ein lokales Extremum, wenn m gerade ist.

4. Seien $f(x) = \sum a_i x^i$, $g(x) = \sum b_i x^i$ von Null verschiedene Polynome. Wir betrachten die rationale Funktion $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Zeige:

- (a) Ist $a_i = 0 = b_i$ für i gerade, so ist $h(x)$ eine gerade Funktion.
- (b) Ist $a_i = 0 = b_i$ für i ungerade, so ist $h(x)$ eine gerade Funktion.
- (c) Ist $a_i = 0$ für i gerade, und $b_i = 0$ für i ungerade, so ist $h(x)$ ungerade.
- (d) Ist $a_i = 0$ für i ungerade, und $b_i = 0$ für i gerade, so ist $h(x)$ ungerade.

Für jeden Fall gebe man ein interessantes Beispiel an (Zeichnung des Graphen mit EXCEL oder einem anderen Funktionenplotter).

Präsenz-Übungen.

(1) (a) Man zeige: Ist $f(x) = x^4 + a_3x^3 + \dots$ ein normiertes Polynom vom Grad 4, so ist $g(x) = f(x - \frac{1}{4}a_3)$ von der Form $g(x) = x^4 + b_2x^2 + b_1x + b_0$.

(b) Sei $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$ ein normiertes Polynom vom Grad n . Wie muss man $c \in \mathbb{R}$ wählen, damit das Polynom $g(x) = f(x - c)$ die Form $g(x) = x^n + b_{n-2}x^{n-2} + \dots$ hat (dass also der zweithöchste Koeffizient verschwindet)?

(2) Man zeichne den Graphen der Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 18}{x - 6} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x^2 - 1}.$$

Man erkläre, was hier passiert. Man konstruiere weitere derartige Beispiele.

(3) Sei $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die x -Koordinate des Wendepunkts $x_0 = -\frac{1}{3}a_2$ ist. Man berechne die Tangentensteigung im Wendepunkt.

(4) Man teile die folgenden Polynome $f(x)$ durch $g(x)$ mit Rest:

$f(x)$	$g(x)$
$x^3 + x^2 + x + 1$	$x + 1$
$x^3 + x^2 + x + 1$	$x + 2$
$x^4 + 2x^2 + 1$	$x^2 - 1$
$x^8 + 5x^7 + 3x^2 + 1$	$x^3 + 2x + 1$

(5) Man skizziere die Funktionen der Form

$$(x - 1)^{n_1}(x - 2)^{n_2}(x - 3)^{n_3}$$

mit $n_i \in \{-2, -1, 1, 2\}$. (Dies sind 64 verschiedene Funktionen, tut mir ja leid.)

(6) **Wenigstens eine Anwendungsaufgabe.** Wir betrachten eine Fisch-Population $L(t)$ eines Sees. Die Anfangspopulation (also Zeitpunkt $t = 0$) bestehe aus 10 Fischen, langfristig stabilisiere sie sich bei 110 Fischen. Die anfängliche Wachstumsrate sei $L'(0) = 4$.

Man gehe davon aus, dass die Entwicklung durch eine Michaelis-Menton-Funktion

$$L(t) = \frac{B \cdot x}{x + K} + L_0 \quad \text{mit} \quad B, K, L_0 > 0$$

beschrieben wird.

Aufgabe: Man bestimme den Zeitpunkt, zu dem sich die Anfangspopulation verfünffacht hat. Zusätzlich soll die Funktion in einem Koordinatensystem gezeichnet werden.