Diesmal Beweise:

Streng monoton wachsende Funktionen

Sei $\mathcal{M}$ die Menge der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die streng monoton wachsend sind.
Sei $\mathcal{F}$ die Menge der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die streng monoton fallend sind.

Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

1.

(a) Sind $f, g \in \mathcal{M}$, so ist auch $f + g \in \mathcal{M}$.

(b) Ist $f \in \mathcal{M}$ und $r \in \mathbb{R}$, so ist auch $rf \in \mathcal{M}$.

(c) Ist $f \in \mathcal{M}$, so ist auch $f^2 \in \mathcal{M}$.

(d) Ist $f \in \mathcal{M}$, so ist auch $f^3 \in \mathcal{M}$.

2.

(a) Sei $f \in \mathcal{M}$. Definiere $g(x) = f(-x)$. Dann ist $g \in \mathcal{M}$.

(b) Sei $f \in \mathcal{M}$. Definiere $g(x) = -f(-x)$. Dann ist $g \in \mathcal{M}$.

(c) Sind $f, g \in \mathcal{M}$, so ist auch $g \circ f \in \mathcal{M}$ (dabei ist $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, für $x \in \mathbb{R}$).

(d) Sei $f \in \mathcal{M}$ und f surjektiv (dann ist f bijektiv, also umkehrbar). Sei f^{-1} die Umkehrfunktion. Es gilt $f^{-1} \in \mathcal{M}$.

3.

(a) Seien $f, g \in \mathcal{M}$ und $g(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $fg \in \mathcal{M}$.

(b) Sei f ein Polynom vom Grad n. Ist $f \in \mathcal{M}$, so ist $n \geq 3$.

(c) Sei f ein Polynom vom Grad 3. Dann ist $f \in \mathcal{M}$.

(d) Seien $f, g \in \mathcal{M}$. Sei $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Dann ist auch $h \in \mathcal{M}$.

4.

(a) $\mathcal{M} \cap \mathcal{F} = \{0\}$.

(b) Sei $f \in \mathcal{M}$, sei $g \in \mathcal{F}$. Dann ist auch $f - g \in \mathcal{M}$.

(c) Genau dann ist $f \in \mathcal{M}$, wenn gilt $-f \in \mathcal{F}$.

(d) Es gibt $f \in \mathcal{M}$ und $g \in \mathcal{F}$ mit $f + g \in \mathcal{M}$.

Präsenz-Aufgaben

Nach oben beschränkte Funktionen.

Sei $\mathcal{B}$ die Menge der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nach oben beschränkt sind (dabei heißt f *nach oben beschränkt,* wenn es eine reelle Zahl b gibt, sodass $f(x) \leq b$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt).
Sei $\mathcal{B}'$ die Menge der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nach unten beschränkt sind (dabei heißt f *nach unten beschränkt,* wenn es eine reelle Zahl c gibt, sodass $c \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt).

Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

1. Sind $f, g \in \mathcal{B}$, so ist auch $f + g \in \mathcal{B}$.

2. Ist $f \in \mathcal{B}$, so ist auch $-f \in \mathcal{B}$.

3. Sind $f, g \in \mathcal{B}$, so ist auch $f \cdot g \in \mathcal{B}$.

4. Sei $f \in \mathcal{B}$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\frac{1}{f} \in \mathcal{B}$.

5. Ist $f \in \mathcal{B}$, und setzen wir $g(x) = \exp(f(x))$, so ist auch $g \in \mathcal{B}$.

6. $\mathcal{M} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

7. Jede lineare Funktion in $\mathcal{B}$ ist konstant.

8. Jede quadratische Funktion in $\mathcal{B}$ ist konstant.

9. Ist $f \in \mathcal{B}$, und $g \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$, so ist $f \cdot g \in \mathcal{B}$.

10. Es gilt: $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \{0\}$.

11. Genau dann ist $f \in \mathcal{B}$, wenn gilt $-f \in \mathcal{B}'$.

12. Es gibt $f \in \mathcal{B}$ und $g \in \mathcal{B}'$ mit $f + g \in \mathcal{B}$.