1. Taschenrechnerzahlen. Betrachten Sie einen Taschenrechner T, zum Beispiel den, mit dem Sie üblicherweise arbeiten. Zahlen, die im Display dargestellt werden, nennen wir T-Zahlen, das Addieren und Multiplizieren mit Hilfe des Taschenrechners nennen wir die T-Addition und die T-Multiplikation. Zeigen Sie

(a) Es gibt nur endlich viele T-Zahlen (es reicht, eine Abschätzung anzugeben).

(b) Die T-Addition und die T-Multiplikation ist nicht für alle Paare von T-Zahlen definiert.

(c) T-Addition und T-Multiplikation sind nicht assoziativ.

(d) Es gibt Paare a, b von T-Zahlen, die beide von Null verschieden sind, deren T-Produkt aber Null ist.

2. Man zeige mit vollständiger Induktion:

(a)
$$\sum_{t=1}^{n} t^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(b)
$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t(t+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. (a) Man zeige, dass $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl ist.

(b) Man verwende das Heron-Verfahren, um $\sqrt{3}$ auf 10 Stellen genau zu berechnen.

(Hinweis, wenn man mit Excel arbeitet: Wählt man unter FORMAT — ZELLEN — ZAHLEN die Kategorie *Zahl*, so kann man als Stellenzahl zum Beispiel 15 eingeben; eine höhere Zahl lohnt sich nicht, da Excel nicht genauer rechnet.)

4. Behauptung: *Ist $0 < q$ eine reelle Zahl, so ist $q + \frac{1}{q} \geq 2$; dabei gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $q = 1$.*

(a) Der übliche Beweis geht von der Ungleichung $(q-1)^2 \geq 0$ aus. Warum gilt diese Ungleichung? Wie folgt daraus die Behauptung?

(b) Welche Beziehung gibt es zwischen der Behauptung und den Überlegungen zum Heron-Verfahren in der Vorlesung?

(c) Man verwende einen Funktionenplotter, um den Graphen der rationalen Funktion $f(x) = x + \frac{1}{x}$ zu zeichnen (auch für x negativ).

Präsenz-Übungen.

1. Man zeige mit vollständiger Induktion:

(a) $$\sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

(b) $$\sum_{t=1}^{n}(2t-1) = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

2. Man beweise, dass die reellen Zahlen $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$ nicht rational sind.

3. Man verwende das Heron-Verfahren, um $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$ auf 10 Stellen genau zu berechnen.

4. Konstruktion von reellen, nicht rationalen Zahlen: (a) Zeige, dass die Zahl

$$0,110100100010000...$$

(hier werden die Ziffern von 10^n für $n = 0, 1, 2, \dots$ hintereinanderander geschrieben) nicht rational ist.

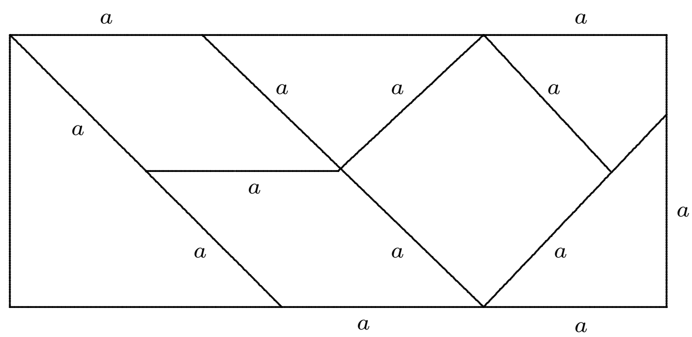
(b) Man gebe ähnlich konstruierte reelle Zahlen an, und zeige, dass sie nicht rational sind.

(c) Ist

$$0,12345678910111213...$$

(hier werden die Ziffern von n für $n = 0, 1, 2, \dots$ hintereinander geschrieben) rational?

5. Grand Tan. Gegeben sei folgendes tangram-artige Puzzle:



(die mit a bezeichneten Kanten habe alle die gleiche Länge). Frage: Lässt sich aus diesen Flächen ein Quadrat legen?